

Jindřich Nečas

Решение задачи Дирихле для эллиптического дифференциального уравнения с частными производными второго порядка

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 3, 467–469

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100371>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
 ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
 С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Предварительное сообщение)

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

(Поступило в редакцию 5/III 1959 г.)

1. Пусть E_n — n -мерное евклидово пространство и пусть Ω — ограниченная область в E_n . Точку в E_n обозначим через $[x_1, \dots, x_n]$. Мы предполагаем, что граница $\bar{\Omega}$ представима в окрестности каждой точки границы при помощи непрерывной функции $n - 1$ переменных, первые обобщенные производные которой ограничены фиксированной постоянной. Далее предполагаем существование областей Ω_k , $\Omega_k \subset \bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \subset \Omega$, $\sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega$, границы которых представимы в окрестности каждой точки границы бесконечно дифференцируемой функцией. Предполагается еще некоторое „метрическое“ свойство сходимости областей Ω_k к Ω . В E_2 такой областью является, напр., каждый многоугольник, в E_3 , напр., конус и т. п.

2. Пусть Du есть самосопряженный эллиптический оператор второго порядка $Du = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u \right) - cu$, где $a^{ij} = a^{ji}$ непрерывны в $\bar{\Omega}$ и обладают первыми производными непрерывными в $\bar{\Omega}$; пусть c — неотрицательная непрерывная функция в $\bar{\Omega}$. Предполагаем, что существует положительная постоянная $d > 0$ так, что $\sum_{i,j=1}^n a^{ij} \xi_i \xi_j \geq d \sum_{i=1}^n \xi_i^2$.

Пусть теперь $W_2^{(1)}(\Omega)$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом, первые обобщенные производные которых также интегрируемы с квадратом. Положим

$$\|u\|_{W_2^{(1)}(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} u^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] \, d\Omega}.$$

Можно показать, что существует „граничное значение“ функции в $W_2^{(1)}(\Omega)$, интегрируемое с квадратом на границе $\dot{\Omega}$ области Ω . Такую функцию мы будем называть следом функции u . Символом $W(\dot{\Omega})$ мы будем обозначать пространство следов и символом $L_2(\dot{\Omega})$ — пространство функций, определенных на границе и интегрируемых там с квадратом.

Пусть теперь $h \in W(\dot{\Omega})$. Мы будем искать $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ так, чтобы $Du = 0$ слабо, и чтобы след u был равен h . (Задача Ia.)

Известным методом ортогональных проекций можно доказать, что существует решение задачи Ia.

3. Пусть теперь $f \in L_2(\Omega)$, т. е. она интегрируема с квадратом в Ω . Мы будем искать $v \in W_{20}^{(1)}(\Omega)$ так, чтобы $Dv = f$ слабо. (Задача II.) Здесь $W_{20}^{(1)}(\Omega)$ есть замыкание в норме $W_2^{(1)}(\Omega)$ пространства функций, бесконечно дифференцируемых в E_n , отличных от нуля только на замкнутых множествах, содержащихся в Ω .

Известным вариационным методом можно доказать, что существует одно и только одно решение задачи II.

Теперь можно дать определение обобщенной производной по внешней конормали $\frac{\partial v}{\partial \nu}$, лежащей в $L_2(\dot{\Omega})$. Притом $\frac{\partial v}{\partial \nu} = T(f)$, где T — линейное непрерывное отображение $L_2(\Omega)$ в $L_2(\dot{\Omega})$. Например, если v лежит в пространстве $W_2^{(2)}(\Omega)$ (которое является пространством функций, интегрируемых с квадратом в Ω и имеющих там обобщенные производные второго порядка, интегрируемые с квадратом), то $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^n a^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} n_j$, где $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ — следы первых производных, а n_j — координаты внешней нормали.

4. Пусть теперь u — наше решение задачи Ia, v — решение задачи II. Тогда имеет место формула Грина

$$\int_{\Omega} u Dv \, d\Omega = \int_{\dot{\Omega}} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS. \quad (*)$$

В качестве первого следствия из формулы Грина вытекает, что задача Ia имеет одно и только одно решение. Равенство (*) определяет u как линейный функционал в $L_2(\Omega)$. Из (*) далее следует, что этот функционал определяется для всех $h \in L_2(\dot{\Omega})$ соотношением

$$\int_{\Omega} u f \, d\Omega = \int_{\dot{\Omega}} h T(f) \, dS. \quad (**)$$

Этим мы дали определение решения задачи Ib, отличающейся от задачи

Из тем, что вместо функции $h \in W(\dot{\Omega})$ мы берем, вообще, функцию h из $L_2(\dot{\Omega})$.

Неравенству $\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L_2(\dot{\Omega})} \leq R \|f\|_{L_2(\Omega)}$ соответствует двойственное неравенство $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq R \|h\|_{L_2(\dot{\Omega})}$, выражающее непрерывную зависимость решения от граничных условий.

Résumé

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES ÉQUATIONS ELLIPTIQUE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

(Communication préalable)

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 5 mars 1959)

Soit Ω un domaine borné dans E_n et soit Du un opérateur elliptique auto-adjoint de second ordre. Alors, sous certaines conditions imposées à Ω et à Du , on peut définir la dérivée généralisée $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ par rapport à la conormale extérieure pour la fonction v qui satisfait à l'équation $Dv = f$ et qui s'annule sur la frontière $\dot{\Omega}$. La fonction f est de carré sommable dans Ω . On a $\frac{\partial v}{\partial \nu} = T(f)$ où T est une transformation linéaire continue de l'espace des fonctions de carré sommable dans Ω dans l'espace des fonctions de carré sommable sur la frontière $\dot{\Omega}$. En s'appuyant sur la formule de Green $\int_{\Omega} u Dv = \int_{\dot{\Omega}} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds$ où u vérifie $Du = 0$, on peut définir la solution de l'équation $Du = 0$ avec la condition $u = h$ vérifiée sur la frontière. Ici h est une fonction de carré sommable sur la frontière $\dot{\Omega}$, d'ailleurs quelconque.