

Alois Švec

Sur le problème de la stratification des congruences de droites

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 2, 299–303

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100411>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SUR LE PROBLÈME DE LA STRATIFICATION DES CONGRUENCES DE DROITES

ALOIS ŠVEC, Praha
(Reçu le 4 juin 1959)

Dans l'espace projectif S_5 , on introduit et l'on étudie une nouvelle généralisation de la notion de congruence de droites stratifiable. Le présent travail est, dans une certaine mesure, inspiré par l'article [1].

1. Soient L_i ($i = 1, 2$) deux systèmes p -paramétriques de sous-espaces $S_{m_i}^i = S_{m_i}^i(u^1, \dots, u^p)$ de l'espace projectif S_n . Supposons que les systèmes L_1, L_2 soient en correspondance donnée par l'égalité des paramètres et que les espaces $S_{m_1}^1(u)$ et $S_{m_2}^2(u)$ ne se coupent pas (on a donc nécessairement $m_1 + m_2 + 1 \leq n$; je suppose $m_1, m_2 \geq 1, p \geq 2$). Je dirai que le couple (L_1, L_2) est stratifiable dans le sens de L_i vers L_j ($i \neq j$) s'il existe une infinité ∞^{m_i} de variétés p -dimensionnelles telles que pour chaque point $x \in S_{m_i}^i(u)$ il en existe une qui passe par lui et qui soit telle que l'intersection de son espace tangent S_p au point x avec l'espace $S_{m_j}^j$, est de dimension m_j dans le cas de $p \geq m_j$ et de dimension $p - 1$ dans le cas de $p < m_j$. Le couple (L_1, L_2) sera dit stratifiable s'il est stratifiable dans les deux sens. Dans la littérature, on n'a étudié jusqu'à présent que les cas de $m_1 = m_2 = p - 1$.

2. Dans ce qui suit, je vais envisager un couple stratifiable (L_1, L_2) dans S_5 où $n = 5, p = 2, m_1 = 1, m_2 = 3, L_1$ étant une congruence de droites (je supposerai le cas non-parabolique où il est possible de décomposer L_1 de deux façons différentes en surfaces développables). Soient $p = p(u, v)$ les droites de L_1 et $\sigma = \sigma(u, v)$ les espaces de L_2 . Pour chaque pair $p(u, v), \sigma(u, v)$ je choisis le repère local A_i de telle façon que A_1, A_2 soient les foyers de la droite $p, \sigma = [A_3 A_4 A_5 A_6]$ et que $A_3(A_4)$ soit le point d'intersection du plan focal au point $A_1(A_2)$ avec l'espace σ . Les équations fondamentales deviennent alors

$$(1) \quad dA_i = \omega_i^j A_j, \quad \omega_i^i = 0, \quad [d\omega_i^j] = [\omega_i^k \omega_k^j] \quad (i, j, \dots = 1, \dots, 6)$$

et

$$(2) \quad \omega_1^4 = \omega_1^5 = \omega_1^6 = \omega_2^3 = \omega_2^5 = \omega_2^6 = 0,$$

$$(3) \quad [\omega_1^2 \omega_2] + [\omega_1 \omega_3^4] = 0, \quad [\omega_1 \omega_3^5] = 0, \quad [\omega_1 \omega_3^6] = 0, \\ [\omega_2^1 \omega_4] + [\omega_2 \omega_4^3] = 0, \quad [\omega_2 \omega_4^5] = 0, \quad [\omega_2 \omega_4^6] = 0$$

où l'on a

$$(4) \quad \omega_1 = \omega_1^3, \quad \omega_2 = \omega_2^4, \quad [\omega_1 \omega_2] \neq 0.$$

Par un choix particulier convenable du repère on peut obtenir

$$(5) \quad \omega_3^5 = \omega_1, \quad \omega_3^6 = 0, \quad \omega_4^5 = 0, \quad \omega_4^6 = \omega_2,$$

$$(6) \quad [\omega_1(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_5^5)] = 0, \quad [\omega_2(2\omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_6^6)] = 0,$$

$$[\omega_3^4 \omega_2] + [\omega_1 \omega_5^6] = 0, \quad [\omega_4^3 \omega_1] + [\omega_2 \omega_6^5] = 0.$$

Les surfaces stratifiantes de la congruence L_1 soient $M = A_1 + tA_2$. Alors on doit avoir $dM = \varphi M + (\cdot)A_3 + (\cdot)A_4 + (\cdot)A_5 + (\cdot)A_6$, c'est-à-dire

$$(7) \quad dt = t^2 \omega_2^1 + t(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \omega_1^2.$$

Soient $N = A_3 + t_1 A_4 + t_2 A_5 + t_3 A_6$ les surfaces stratifiantes du système L_2 de sorte qu'il faut qu'on ait $dN = \psi N + (\cdot)A_1 + (\cdot)A_2$, c'est-à-dire

$$(8) \quad dt_1 = t_1^2 \omega_4^3 + t_1 t_2 \omega_5^3 + t_1 t_3 \omega_6^3 + t_1(\omega_3^3 - \omega_4^4) - t_2 \omega_5^4 - t_3 \omega_6^4 - \omega_3^4,$$

$$dt_2 = t_1 t_2 \omega_4^3 + t_2^2 \omega_5^3 + t_2 t_3 \omega_6^3 + t_2(\omega_3^3 - \omega_5^5) - t_3 \omega_6^5 - \omega_1,$$

$$dt_3 = t_1 t_3 \omega_4^3 + t_2 t_3 \omega_5^3 + t_3^2 \omega_6^3 - t_1 \omega_2 - t_2 \omega_5^6 + t_3(\omega_3^3 - \omega_6^6).$$

Les systèmes (7), (8) doivent être complètement intégrables; un calcul direct montre que le couple stratifiable (L_1, L_2) est donné par le système fermé (2) + (5)

$$(9) \quad \omega_3^2 = 0, \quad \omega_4^1 = 0$$

et

$$(10) \quad [\omega_1^2 \omega_2] + [\omega_1 \omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^1 \omega_1] + [\omega_2 \omega_4^3] = 0,$$

$$[\omega_3^4 \omega_2] + [\omega_1 \omega_5^6] = 0, \quad [\omega_4^3 \omega_1] + [\omega_2 \omega_6^5] = 0,$$

$$[\omega_1(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_5^5)] = 0, \quad [\omega_2(2\omega_4^4 - \omega_2^2 - \omega_6^6)] = 0,$$

$$(11) \quad [\omega_1 \omega_5^1] = [\omega_1 \omega_6^1] = [\omega_1 \omega_3^1] = [\omega_2 \omega_5^2] = [\omega_2 \omega_6^2] = [\omega_2 \omega_4^2] = 0,$$

$$(12) \quad [\omega_3^1 \omega_1^2] + [\omega_3^4 \omega_4^2] + [\omega_1 \omega_5^2] = 0, \quad [\omega_4^2 \omega_2^1] + [\omega_4^3 \omega_3^1] + [\omega_2 \omega_6^1] = 0.$$

Le couple stratifiable (L_1, L_2) dépend donc de 14 fonctions d'une variable.

3. J'introduis dans l'espace S_5^* , dual à l'espace S_5 , les bases duales par les relations

$$(13) \quad A_i E^j = \delta_i^j \quad (i, j = 1, \dots, 6)$$

avec

$$(14) \quad dE^j = -\omega_i^j E^i.$$

Le système L_2 engendre dans S_5^* un système L_2^* à deux paramètres de droites $[E_1, E_2]$. Si à partir de (11) j'ai

$$(15) \quad \omega_5^1 = a\omega_1, \quad \omega_5^2 = b\omega_2, \quad \omega_6^1 = c\omega_1, \quad \omega_6^2 = e\omega_2, \quad \omega_3^1 = f\omega_1, \quad \omega_4^2 = g\omega_2,$$

alors

$$(16) \quad \begin{aligned} dE^1 &= -\omega_1^1 E^1 - \omega_2^1 E^2 - \omega_1(fE^3 + aE^5 + cE^6), \\ dE^2 &= -\omega_1^2 E^1 - \omega_2^2 E^2 - \omega_2(gE^4 + bE^5 + eE^6). \end{aligned}$$

L_2^* est une congruence de droites qui est en correspondance développable avec L_1 (ce qui veut dire que les surfaces développables de L_2^* et L_1 se correspondent les unes aux autres).

De même, les intersections des espaces tangents de la congruence L_1 le long des droites $p(u, v)$ avec les espaces correspondants $\sigma(u, v)$ engendrent dans S_5 un système L à deux paramètres formé des droites $[A_3, A_4]$. On a

$dA_3 = \omega_3^3 A_3 + \omega_3^4 A_4 + \omega_1(fA_1 + A_5)$, $dA_4 = \omega_4^3 A_3 + \omega_4^4 A_4 + \omega_2(gA_2 + A_6)$, donc L est une congruence de droites et est en correspondance développable avec L_1 ; ses foyers sont les points d'intersection des plans focaux de la congruence L_1 avec les espaces correspondants du système L_2 .

Pour la surface stratifiante $M = A_1 + tA_2$ de la congruence L_1 , j'obtiens

$$(18) \quad \begin{aligned} dM &= (.) M + \omega_1 A_3 + \omega_2 t A_4, \\ d^2 M &= (.) M + (.) A_3 + (.) A_4 + (\omega_1)^2 (fA_1 + A_5) + \\ &+ (\omega_2)^2 t(gA_2 + A_6); \end{aligned}$$

pour la surface stratifiante $N = A_3 + t_1 A_4 + t_2 A_5 + t_3 A_6$ du système L_2 il vient

$$(19) \quad \begin{aligned} dN &= (.) N + (f + at_2 + ct_3) \omega_1 A_1 + (gt_1 + bt_2 + et_3) \omega_2 A_2, \\ d^2 N &= (.) N + (.) A_1 + (.) A_2 + (f + at_2 + ct_3) (\omega_1)^2 A_3 + \\ &+ (gt_1 + bt_2 + et_3) (\omega_2)^2 A_4. \end{aligned}$$

Toutes les surfaces stratifiantes (des deux systèmes L_1 et L_2) sont surfaces à réseau conjugué qui est engendré sur chacune d'elles par une surface développable de la congruence L_1 ou par le système ∞^1 d'espaces $\sigma(u, v)$ auquel il correspond après la dualisation une surface développable de la congruence L_2^* .

4. Le couple (L_1, L_2) sera dit *fortement stratifiable* si les espaces tangents de la congruence L coïncident avec les espaces correspondants $\sigma(u, v)$, c'est-à-dire

$$(20) \quad \omega_3^1 = \omega_4^2 = 0.$$

Un calcul direct montre que les couples fortement stratifiables sont donnés par le système fermé (2) + (5) + (9) + (20) + (10) et

$$(21) \quad \omega_5^2 = \omega_6^1 = 0,$$

$$(22) \quad [\omega_1 \omega_5^1] = [\omega_2 \omega_6^2] = 0,$$

$$(23) \quad [\omega_5^1 \omega_1^2] + [\omega_6^2 \omega_2^1] = 0, \quad [\omega_6^2 \omega_2^1] + [\omega_6^5 \omega_5^1] = 0.$$

Un couple fortement stratifiable (L_1, L_2) dépend de dix fonctions d'une variable.

Il vient de (10) et (22)

$$(24) \quad \omega_1^2 = \alpha_1 \omega_1 - \alpha_2 \omega_2, \quad \omega_3^4 = \alpha_3 \omega_1 - \alpha_1 \omega_2, \quad \omega_5^6 = \alpha_4 \omega_1 - \alpha_3 \omega_2, \\ \omega_2^1 = \beta_1 \omega_1 - \beta_2 \omega_2, \quad \omega_4^3 = \beta_2 \omega_1 - \beta_3 \omega_2, \quad \omega_6^5 = \beta_3 \omega_1 - \beta_4 \omega_2,$$

$$(25) \quad \omega_5^1 = \varrho \omega_1, \quad \omega_6^2 = \sigma \omega_2$$

et de (23)

$$(26) \quad \varrho \alpha_4 - \sigma \alpha_4 = 0, \quad \sigma \beta_1 - \varrho \beta_4 = 0.$$

En différentiant extérieurement (25) j'obtiens (à l'aide de (10_{5,6}))

$$(27) \quad [\omega_1(d\varrho + 3\varrho\overline{\omega_{11} - \omega_{33}})] = 0, \quad [\omega_2(d\sigma + 3\sigma\overline{\omega_{22} - \omega_{44}})] = 0.$$

Il est possible de particulariser les repères de façon à avoir

$$(28) \quad \varrho = \sigma = 1$$

et

$$(29) \quad [\omega_1(\omega_{33} - \omega_{11})] = [d\omega_1] = 0, \quad [\omega_2(\omega_{44} - \omega_{22})] = [d\omega_2] = 0.$$

Je peux poser directement

$$(30) \quad \omega_1 = du, \quad \omega_2 = dv.$$

Les quasiasymptotiques γ_{23} des surfaces (A_1) et (A_2) sont

$$(31) \quad \alpha_4(\omega_1)^3 - \alpha_2(\omega_2)^3 = 0, \quad \beta_1(\omega_1)^3 - \beta_4(\omega_2)^3 = 0,$$

donc en vertu de (26), (28) et (30)

$$(32) \quad du^3 - dv^3 = 0$$

Dans mon travail [2] j'ai appelé surface R une surface à réseau conjugué dans l'espace S_{2n+1} qui admet des déformations projectives C_{n+1} . J'ai montré qu'une surface $x = x(u, v)$ à réseau conjugué est une surface R si les paramètres u, v peuvent être choisis de telle façon que $du dv = 0$ soit le réseau conjugué et que les quasiasymptotiques γ_{23} de cette surface et d'une de ses transformées de Laplace se correspondent et soient données par l'équation (32). J'appelle congruence R une congruence dont une surface focale est R (il en est alors de même pour l'autre). J'obtiens ainsi: *La congruence L_1 d'un couple fortement stratifiable (L_1, L_2) est une congruence R .* Ce dernier théorème montre que la manière introduite de stratification des congruences de droites a été choisie très convenablement; cela révèle aussi la nécessité d'une étude détaillée de ces questions.

Bibliographie

- [1] P. M. Гейдельман: Расслоение двухпараметрических семейств прямых в многомерном проективном пространстве; ДАН СССР, 1953, т. XCIII, № 6, 957—960.
[2] A. Švec: Les surfaces R dans les espaces projectifs de dimension impaire, Чех. мат. ж. 9 (84), 1959, 243—264.

К ПРОБЛЕМЕ РАССЛОЕНИЯ КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Пусть в S_5 задана непараболическая конгруэнция L_1 прямых $p(u, v)$ и двухпараметрическая система L_2 пространств $S_3(u, v)$, пусть L_2 образует в двойственном пространстве S_5^* систему прямых L_2^* . Пара (L_1, L_2) будет расслояемой, если существует система ∞^1 (соотв. ∞^3) поверхностей так, что через каждую точку прямой $p(u, v)$ (соотв. пространства $S_3(u, v)$) проходит одна поверхность системы и ее касательная плоскость в этой точке пересекает $S_3(u, v)$ в прямой (соотв. проходит через прямую $p(u, v)$). Линии пересечения касательных пространств конгруэнции L_1 вдоль прямых $p(u, v)$ с пространствами $S_3(u, v)$ образует систему $L \infty^2$ прямых $q(u, v)$. Пара (L_1, L_2) расслояема сильно, если она расслояема и $S_3(u, v)$ — касательное пространство системы L вдоль прямой $q(u, v)$. Имеют место утверждения:

1. Расслояемая (соотв. сильно расслояемая) пара (L_1, L_2) зависит от 14 (соотв. 10) функций одного переменного.

2. L и L^* являются у расслояемой пары (L_1, L_2) прямолинейными конгруэнциями, находящимися в развертывающемся соответствии с L_1 ; фокусы конгруэнции L являются точками пересечения фокальных плоскостей конгруэнции L_1 с соответствующими пространствами системы L_2 .

3. Расслояющими поверхностями систем L_1, L_2 являются поверхности с сопряженной сетью, которую на каждой из них высекает развертывающаяся поверхность конгруэнции L_1 , соотв. той системой ∞^1 пространств $S_3(u, v)$, которой после дуализации соответствует развертывающаяся поверхность конгруэнции L_2^* .

4. Фокальные поверхности конгруэнции L_1 сильно расслояемой пары (L_1, L_2) допускают проективное изгибание C_3 ; значение результата вытекает из сравнения с [2].