Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

Généralisation d'une construction de M. B. Segre

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 2, 304–308

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100412`

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

GÉNÉRALISATION D'UNE CONSTRUCTION DE M. B. SEGRE

ALOIS ŠVEC, Praha
(Reçu le 4 juin 1959)

On étudie les correspondances existant entre des surfaces d'S_{2n} au réseau conjugué dont toutes les deux transformées de Laplace dégénèrent.

Dans mes travaux [2] et [3], j'ai trouvé de larges généralisations de la construction, donné par M. B. SEGRE [1], de tous les réseaux R dans S_3 dont toutes les deux transformées de Laplace sont dégénérées. J'ai montré, en effet, qu'une construction analogue conduit à toutes les surfaces $x = x(u, v)$ avec $x_{uv} = 0$, dans S_{2n+1} et admettant des déformations projectives du type C_{n+1} ainsi qu'à toutes les variétés $x = x(u_1, \ldots, u_n)$ avec $\partial_{u_i u_j} x = 0$ dans S_{2n-1} admettant des déformations projectives du type C_2. Dans ce qui suit j'étudie d'une façon détaillée les correspondances T entre des surfaces $x = x(u, v)$, $x_{uv} = 0$, dans S_{2n} et je montre que les surfaces admettant des transformations T d'un certain type particulier peuvent être obtenues à l'aide d'une construction généralisant d'une manière évidente celle donnée par M. B. Segre.

Une surface $x = x(u, v)$ au réseau conjugué, dont toutes les deux transformées de Laplace sont dégénérées et qui se trouve située dans l'espace projectif S_{2n} à $2n$ dimensions, sera donnée par les équations

$$(1) \qquad x^{1,1} = 0\,, \quad x^{n+1,0} = ax + \sum_{i=1}^{n} b^{(i)} x^{i,0} + \sum_{i=1}^{n} c^{(i)} x^{0,i}\,,$$
$$x^{0,n+1} = \alpha x + \sum_{i=1}^{n} \beta^{(i)} x^{i,0} + \sum_{i=1}^{n} \gamma^{(i)} x^{0,i}$$

où j'écris

$$f^{i,j} = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial u^i \, \partial v^j}\,.$$

Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$(3) \qquad a_v + c^{(n)} \alpha = 0\,, \qquad \alpha_u + \beta^{(n)} a = 0\,,$$
$$b_v^{(i)} + c^{(n)} \beta^{(i)} = 0\,, \qquad \gamma_u^{(i)} + \beta^{(n)} c^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)\,,$$
$$c_v^{(1)} + a + c^{(n)} \gamma^{(1)} = 0\,, \qquad \beta_u^{(1)} + \alpha + \beta^{(n)} b^{(1)} = 0\,,$$
$$c_v^{(i)} + c^{(i-1)} + c^{(n)} \gamma^{(i)} = 0\,, \qquad \beta_v^{(i)} + \beta^{(i-1)} + \beta^{(n)} b^{(i)} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n)\,.$$

La surface $\bar{x} = \bar{x}(u, v)$ de l'espace $\bar{S}_{2n}$ qui est en déformation projective d'ordre n (c'est-à-dire en correspondance C_n) avec la surface (1) sera manifestement donnée par les équations $(\bar{1})$ que l'on obtient à partir de (1) en ajoutant la barre à toutes les expressions (sauf u et v); l'homographie n-osculatoire générale sera alors

$$(4) \qquad K\bar{x} = x; \quad K\bar{x}^{i,0} = x^{i,0}, \quad K\bar{x}^{0,i} = x^{0,i} \quad (i = 1, \ldots, n-1);$$
$$K\bar{x}^{n,0} = x^{n,0} + \lambda x, \quad K\bar{x}^{0,n} = x^{0,n} + \mu x\,;$$

voir [2]. Pour l'homographie (4) j'obtiens

$$(5) \qquad \begin{aligned} &K\bar{x} = x\,, \quad Kd^i\bar{x} = \mathrm{d}^i x \quad (i = 1, \ldots, n-1)\,,\\ &K\mathrm{d}^n\bar{x} = \mathrm{d}^n x + (\lambda\, \mathrm{d}u^n + \mu\, \mathrm{d}v^n)\, x\,,\\ &K\mathrm{d}^{n+1}\bar{x} = \mathrm{d}^{n+1}x + (n+1)\,(\lambda\, \mathrm{d}u^n + \mu\, \mathrm{d}v^n)\, \mathrm{d}x + (.)\, x +\\ &\qquad + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i x^{i,0} + \sum_{i=1}^{n} \psi_i x^{0,i} \end{aligned}$$

où

$$(6) \qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= (b^{(1)} - \bar{b}^{(1)} + \overline{n+1}\,\lambda)\, \mathrm{d}u^{n+1} + (n+1)\,\mu\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v^n + (\beta^{(1)} - \bar{\beta}^{(1)})\, \mathrm{d}v^{n+1}\,,\\ \psi_1 &= (c^{(1)} - \bar{c}^{(1)})\, \mathrm{d}u^{n+1} + (n+1)\,\lambda\, \mathrm{d}u^n\, \mathrm{d}v + (\gamma^{(1)} - \bar{\gamma}^{(1)} + \overline{n+1}\mu)\, \mathrm{d}v^{n+1}\,,\\ \varphi_i &= (b^{(i)} - \bar{b}^{(i)})\, \mathrm{d}u^{n+1} + (\beta^{(i)} - \bar{\beta}^{(i)})\, \mathrm{d}v^{n+1}\,,\\ \psi_i &= (c^{(i)} - \bar{c}^{(i)})\, \mathrm{d}u^{n+1} + (\gamma^{(i)} - \bar{\gamma}^{(i)})\, \mathrm{d}v^{n+1}\\ &\qquad\qquad (i = 2, \ldots, n)\,. \end{aligned}$$

La transformation qui associe la droite $p = [x, \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i x^{i,0} + \psi_i x^{0,i})]$ à la tangente $[x, \mathrm{d}x]$ sera appelée *transformation K-linéarisante*; elle jouit des propriétés suivantes: Soit γ une courbe arbitraire située sur la surface (x), passant par le point x et ayant $[x, \mathrm{d}x]$ pour la tangente, soit $\bar{\gamma}$ la courbe correspondante située sur $(\bar{x})$, alors

1) si la droite p est indéterminée (c'est-à-dire si $\varphi_i = \psi_i = 0$; $i = 1, \ldots, n$), alors les courbes γ et $K\bar{\gamma}$ ont au point x un contact analytique d'ordre $n + 1$;

2) si les deux droites $[x, \mathrm{d}x]$ et p coïncident, (c'est-à-dire si $\varphi_i = \psi_i = 0$ pour $i = 2, \ldots, n$ et $\varphi_1\, \mathrm{d}v - \psi_1\, \mathrm{d}u = 0$), alors les courbes γ et $K\bar{\gamma}$ ont au point x un contact analytique d'ordre exactement n et un contact géometrique d'ordre $n + 1$;

3) si ni le premier ni le second cas ne se présente, p sera le lieu géometrique des centres de projection tels que les projection des courbes γ et $K\bar{\gamma}$ dans un hyperplan arbitraire passant par x ont au point x un contact analytique d'ordre $n + 1$ (mais les courbes γ et $K\bar{\gamma}$ elles-mêmes ont un contact analytique d'ordre exactement n).

Une transformation T entre deux surfaces $(\bar{x})$ et (x) sera dite *du type* $C_{n(\alpha)}$ si pour chaque couple de points correspondants x, $\bar{x}$ il existe une homographie

n-osculatoire (4) pour laquelle les droites K-linéarisantes de toutes les tangentes sont situées dans l'espace α-osculatoire de la surface (x) au point x. La condition nécessaire et suffisante pour que T soit du type $C_{n(\alpha)}$ $(1 \leqq \alpha \leqq n)$ est évidemment

$$(7) \qquad b^{(i)} = \bar{b}^{(i)}, \ \beta^{(i)} = \bar{\beta}^{(i)}, \ c^{(i)} = \bar{c}^{(i)}, \ \gamma^{(i)} = \bar{\gamma}^{(i)} \quad (i = \alpha + 1, \ldots, n) .$$

Soit T une correspondance du type $C_{n(1)}$, alors les courbes $\varphi_1 \, \mathrm{d}v - \psi_1 \, \mathrm{d}u = 0$ dont les tangentes déterminent les directions des courbes de contact élevé (voir ci-dessus, alinéa 2, des propriétés des transformations K-linéarisantes), seront

$$(8) \qquad \begin{aligned} &(c^{(1)} - \bar{c}^{(1)}) \, \mathrm{d}u^{n+2} - (b^{(1)} - \bar{b}^{(1)}) \, \mathrm{d}u^{n+1} \, \mathrm{d}v + \\ &+ (\gamma^{(1)} - \bar{\gamma}^{(1)}) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v^{n+1} - (\beta^{(1)} - \bar{\beta}^{(1)}) \, \mathrm{d}v^{n+2} = 0 . \end{aligned}$$

Pour les correspondances T dont les courbes du réseaux conjugué sont caractéristiques on a

$$(9) \qquad c^{(1)} = \bar{c}^{(1)} , \quad \beta^{(1)} = \bar{\beta}^{(1)} ,$$

les courbes caractéristiques sont alors constituées par le réseau conjuguée et par la n-couche

$$(10) \qquad (b^{(1)} - \bar{b}^{(1)}) \, \mathrm{d}u^n - (\gamma^{(1)} - \bar{\gamma}^{(1)}) \, \mathrm{d}v^n = 0$$

apolaire au réseau conjugué.

Je dirai que T est *du type* C^u (resp. C^v) si elle est du type $C_{n(1)}$, que les courbes du réseau conjugué soient caractéristiques et que la n-couche (10) se réduise à $\mathrm{d}u^n = 0$ (resp. $\mathrm{d}v^n = 0$). Si deux surfaces (1) et $(\bar{1})$ sont en correspondance T du type C^u, j'obtiens

$$(11) \qquad \begin{gathered} b^{(i)} = \bar{b}^{(i)} \quad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, n ; \\ \beta^{(i)} = \bar{\beta}^{(i)}, \ c^{(i)} = \bar{c}^{(i)}, \ \gamma^{(i)} = \bar{\gamma}^{(i)} \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n . \end{gathered}$$

Si la surface (1) admet des surfaces qui soient avec elle en correspondance T du type C^u, il doit y avoir des fonctions $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{b}^{(1)}$ pour lesquelles on n'a pas simultanément $\bar{a} = a$, $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{b}^{(1)} = b^{(1)}$ et qui vérifient avec les fonctions $b^{(i)}$ $(i = 2, \ldots, n)$ et $\beta^{(i)}$, $c^{(i)}$, $\gamma^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ les conditions d'intégrabilité (3). Or, il découle de (11), (3_3) et $(\bar{3}_3)$

$$(12) \qquad a = \bar{a} ,$$

donc on ne peut pas avoir simultanément $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{b}^{(1)} = b^{(1)}$. Mais si $\bar{b}^{(1)} = b^{(1)}$, j'obtiendrais à partir de (3_7) et $(\bar{3}_7)$ l'égalité $\alpha = \bar{\alpha}$, ce qui est impossible. De $(3_{7,1})$ il vient

$$c^{(n)} \beta^{(1)}_u - a_v + c^{(n)} \beta^{(n)} b^{(1)} = 0 ,$$

si (1) admet des transformations du type C^u, on a nécessairement

$$c^{(n)}\beta^{(n)} = 0\,. \tag{13}$$

Supposons $c^{(n)} = 0$. De (3_2) il vient $b^{(1)} = U(u)$, $\bar{b}^{(1)} = \bar{U}(u)$; de (3_7), $(\bar{3}_7)$ j'obtiens

$$\bar{\alpha} - \alpha = \beta^{(n)}(U - \bar{U}) \tag{14}$$

de sorte que les transformations du type C^u d'une surface donnée dépendent au plus d'une fonction d'une variable (à savoir de la fonction $\bar{U} = \bar{U}(u)$). Je vais étudier les surfaces qui admettent des transformations du type C^u de cette généralité maximum; de telles surfaces seront désignées par R^u (les surfaces R^v étant définies d'une manière analogue). De (3_5) et $(\bar{3}_5)$ il vient $\bar{\alpha}_u - \alpha_u = 0$, et j'obtiens ainsi a partir de (14)

$$(\beta^{(n)}U^*)_u = 0\,, \quad U^* = U - \bar{U}\,, \tag{15}$$

pour une fonction arbitraire $\bar{U}$, donc aussi pour une fonction U^* arbitraire, ce qui donne

$$\beta^{(n)} = 0 \tag{16}$$

pour toute surface R^u.

Une surface qui est R^u et R^v simultanément sera désignée par R^0, j'ai alors

$$c^{(n)} = \beta^{(n)} = 0\,. \tag{17}$$

Il s'ensuit alors des conditions d'intégrabilité (3)

$$\begin{gathered} a = 0,\ b^{(i)} = U_i,\ c^{(i)} = 0,\ \alpha = 0,\ \beta^{(i)} = 0,\ \gamma^{(i)} = V_i\,; \\ U_i = U_i(u),\ V_i = V_i(v) \quad (i = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{18}$$

et, par un nouveau choix des paramètres u et v, on peut rendre à l'équation (1) la forme suivante

$$x^{1,1} = 0,\ x^{n+1,0} = \sum_{i=1}^{n-1} U_i x^{i,0} + x^{n,0},\ x^{0,n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} V_i x^{0,i} + x^{0,n}\,. \tag{19}$$

Les courbes de chaque couche du réseaux conjugué de la surface (19) sont projectives mutuellement et chacune d'elles est située dans un sous-espace n-dimensionnel; chacune des transformées de Laplace est située dans un sous-espace à $n - 1$ dimensions. On trouve ensuite aisément que chaque surface (19) est R^0 et peut etre obtenue par la construction suivante:

Supposons que nous ayons dans l'espace S_{2n} des espaces S_0, S_n, S'_n, S_{n-1}, S'_{n-1} et deux courbes γ, γ' tels que $S_0 \notin S_{n-1} \subset S_n$, $S_0 \notin S'_{n-1} \subset S'_n$, $S_0 = S_n \cap S'_n$, $S_0 \in \gamma \subset S_n$, $S_0 \in \gamma' \subset S'_n$. Soit P un point arbitraire de la courbe γ', $S_n^P = [P, S_{n-1}]$, $S_0^P = [S_0, P] \cap S'_{n-1}$ et soit γ_P la projection de la courbe γ dans S_n^P du point S_0^P. La surface R^0 est alors l'ensemble des courbes γ_P, $P \in \gamma'$.

Bibliographie

[1] *B. Segre:* Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili ..., Mem. della Acc. Italia, Vol. *II.*, No 3, 1931.

[2] *A. Švec:* Les surfaces *R* dans les espaces projectifs de dimension impaire, Чех. мат. ж. *9* (*84*) 1959, 243–264.

[3] *A. Švec:* Déformation projective des systèmes n-conjuguées dans S_{2n-1} dont toutes les transformations de Laplace dégénèrent, Чех. мат. ж. *9* (*84*) 1959, 440–444.

Резюме

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО ПОСТРОЕНИЯ Б. СЕГРЕ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Поверхность $x = x(u, v)$ с $x_{uv} = 0$ в S_{2n} называется R^u, если она допускает преобразования $\bar{x} = \bar{x}(u, v)$, зависящие от одной функции одного переменного, K-линеаризирующие прямые (K есть n-соприкасающаяся коллинеация преобразования $x \to \bar{x}$) всех касательных лежат в касательной плоскости поверхности (x) и характеристические кривые выражаются уравнением $\mathrm{d}u^{n+1}\,\mathrm{d}v = 0$. Поверхность будет R°, если она R^u и R^v; построение поверхности R° в общем случае производится так:

Пусть в пространстве S_{2n} даны пространства S_0, S_n, S'_n, S_{n-1}, S'_{n-1} и кривые γ, γ', для которых S_0 non $\in S_{n-1} \subset S_n$, S_0 non $\in S'_{n-1} \subset S'_n$, $S_0 = S_n$, $\cap\ S'_n$, $S_0 \in \gamma \subset S^n$, $S_0 \in \gamma' \subset S'_n$. Пусть $P \in \gamma'$, $S_n^P = [P, S_{n-1}]$, $S_0^P = [S_0, P] \cap S'_{n-1}$ и γ_P — проекция γ в S_n^P из точки S_0^P. Тогда поверхностью R° будет совокупность кривых γ_P, $P \in \gamma'$.

Значение этих результатов ясно обрисуется только после сравнения с аналогичными результатами в [1], [2] и [3].