Czechoslovak Mathematical Journal

Ladislav Procházka

Заметка о расщепляемости смешанных Абелевых групп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 4, 479–492

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100429

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *10* (*85*) ПРАГА 20. XI. 1960 г., No 4

ЗАМЕТКА О РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ СМЕШАННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

(Поступило в редакцию 22/VI 1959 г.)

В этой статье рассматривается возможность перенести расщепляемость из данной абелевой группы на её подгруппу и наоборот — из подгруппы на бсю группу. В этом направлении здесь доказана следующая теорема:

Пусть G — произвольная смешанная абелева группа и пусть H — такая её подгруппа, что фактор-группа G/H является конечной. В этом случае группа G расщепляема тогда и только тогда, когда расщепляема её подгруппа H.

Словом группа мы будем всюду в этой статье понимать аддитивно записанную абелеву группу; нулевой элемент группы мы будем записывать символом $\mathbf{0}$. Если P — произвольная периодическая группа, то знаком $P^{(p)}$ будем обозначать p-примарное слагаемое группы P и знаком $P^{(p)}_*$ — прямую сумму бсех остальных примарных слагаемых группы P. Итак, в частности будет $P = P^{(p)} \dotplus P^{(p)}_*$. Символами $C(p^k)$, $C(\infty)$ и $C(p^\infty)$ мы будем пользоваться для того, чтобы обозначить соответственно конечную циклическую группу порядка p^k, бесконечную циклическую группу и полную p-примарную группу Прюфера. В заключение отметим, что символом $\sum_{\iota \in I}{}_d G_\iota$ будем обозначать прямую сумму групп G_ι $(\iota \in I)$.

Лемма 1. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является периодической p-примарной группой. Если P (соотв. Q) — периодическая часть группы G (соотв. подгруппы H), мо имеет место равенство $P^{(p)}_* = Q^{(p)}_*$.*

Доказательство. Очевидно, имеет место соотношение $Q^{(p)}_* \subseteq P^{(p)}_*$, так как $Q \subseteq P$. Итак, предположим, что $Q^{(p)}_* \subsetneqq P^{(p)}_*$. Тогда существует простое число q, $q \neq p$, и такой элемент $b^* \in P^{(p)}_*$, что $b^* \operatorname{non} \in Q^{(p)}$, но уже $qb^* \in Q^{(p)}_*$. Из предположения о фактор-группе G/H следует, что для удобного натурального числа k будет $p^k b^* \in H$, и так как $b^* \in P^{(p)}_*$, то $p^k b^* \in Q^{(p)}$. Простые числа p, q различны, следовательно существуют такие целые числа h_1, h_2, что $h_1 p^k + h_2 q = 1$, или

$$b^* = h_1(p^k b^*) + h_2(q b^*) \in Q_*^{(p)},$$

что противоречит выбору элемента b^*. Тем самым мы уже доказали справедливость равенства $P_*^{(p)} = Q_*^{(p)}$.

Лемма 2. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является периодической p-примарной группой. Если P (соотв. Q) — периодическая часть группы G (соотв. подгруппы H), то подгруппа $P_*^{(p)}$ служит прямым слагаемым для группы G тогда и только тогда, когда она служит прямым слагаемым для подгруппы H.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что при условиях нашей леммы подгруппа $P_*^{(p)}$ является действительно подгруппой группы H, как это вытекает из леммы 1.

Пусть, во-первых, группа $P_*^{(p)}$ служит для группы G прямым слагаемым и пусть имеет место прямое разложение вида $G = G_1 \dotplus P_*^{(p)}$. Так как $P_*^{(p)} \subseteq H$, то в таком случае будет также

$$H = (G_1 \cap H) \dotplus P_*^{(p)}.$$

Пусть теперь наоборот

$$H = H_1 \dotplus P_*^{(p)}. \tag{1}$$

Символом G_1 обозначим множество всех элементов $g \in G$, удовлетворяющих некоторому соотношению типа $p^k g \in H_1$. Как легко видеть, множество G_1 является подгруппой группы G, обладающей тем свойством, что $G_1 \cap P_*^{(p)} = (\mathbf{0})$, или

$$\{G_1, P_*^{(p)}\} = G_1 \dotplus P_*^{(p)}. \tag{2}$$

Пусть g — произвольный элемент группы G. Так как фоктор-группа G/H по предположению периодична и p-примарна, то $p^k g \in H$ для какого-то натурального числа k. Имея в виду прямое разложение (1), можем писать

$$p^k g = h + b, \quad h \in H_1, \quad b \in P_*^{(p)}.$$

Но так как $p^k P_*^{(p)} = P_*^{(p)}$, то существует элемент $b' \in P_*^{(p)}$ такой, что $p^k b' = b$. Тогда можно писать

$$p^k(g - b') = p^k g - b = h \in H_1,$$

или $g - b' \in G_1$. Тогда

$$g = (g - b') + b' \in \{G_1, P_*^{(p)}\},$$

чем мы доказали, что $\{G_1, P_*^{(d)}\} = G$. Отсюда и из соотношения (2) уже следует, что подгруппа $P_*^{(p)}$ служит для группы G прямым слагаемым.

Этим лемма полностью доказана.

Лемма 3. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что для фактор-группы G/H имеет место изоморфизм*

$$G/H \cong C(p) \ . \tag{3}$$

Если P (соотв. Q) — периодическая часть группы G (соотв. подгруппы H), то или $P = Q$, или $Q \subsetneqq P$ и $P/Q \cong C(p)$.

Доказательство. Предположим, что $Q \neq P$, или $Q \subsetneqq P$. Если $x \in P$, но $x \operatorname{non} \in Q$, то по изоморфизму (3) должно уже быть $p\,x \in H$, и, в частности, $px \in Q$. Это значит, что каждый ненулевой элемент фактор-группы P/Q является элементом порядка p. Если теперь x_i $(i = 1, 2)$ — два таких элемента группы P, что $x_i \operatorname{non} \in Q$ $(i = 1, 2)$, то из соотношения (3) следует существование натурального числа k, $0 < k < p$, для которого справедливо равенство

$$x_2 + H = k(x_1 + H) = kx_1 + H \ ,$$

или $x_2 - kx_1 \in H$. Но тогда должно уже быть $x_2 - kx_1 \in Q$, или

$$x_2 + Q = kx_1 + Q = k(x_1 + Q) \ ,$$

и это значит, что $P/Q \cong C(p)$.

Этим доказательство леммы завершено.

Лемма 4. *Пусть P — произвольная периодическая p-примарная группа и пусть Q — её подгруппа. Изоморфизм*

$$P/Q \cong C(p) \tag{4}$$

имеет место тогда и только тогда, когда существуют элемент (ненулевой) $x \in P$ и подгруппа $Q_1 \subseteq Q$ так, что справедливы равенства[1])

$$P = \{x\} \dotplus Q_1 \ , \quad Q = \{px\} \dotplus Q_1 \ . \tag{5}$$

Доказательство. В одном направлении наше утверждение тривиально, так как если имеют место прямые разложения (5), то, очевидно, наступит изоморфизм (4).

Итак пусть теперь имеет место изоморфизм (4). Для того, чтобы доказать существование прямых разложений (5), будем в дальнейшем различать два случая.

а) Пусть Q является сервантной подгруппой группы P. Тогда подгруппа Q служит для группы P прямым слагаемым (смотри [1], стр. 82, теорема 25.2), или

$$P = C \dotplus Q \ .$$

Притом из изоморфизма (4) непосредственно следует, что группа Cявляется

[1]) Прямое слагаемое Q_1 может быть и нулевой группой.

циклической группой порядка p: $C = \{x\} \cong C(p)$. Итак, в этом случае имеем

$$P = \{x\} \dotplus Q\,, \quad Q = \{px\} \dotplus Q\,,$$

так как $px = \mathbf{0}$.

b) Пусть Q не является сервантной подгруппой группы P. Но это значит (смотри [1], стр. 78, I)), что существует элемент y нижнего слоя $Q[p]$ группы Q, высота $\chi(y; Q)$ которого в подгруппе Q меньше его высоты $\chi(y; P)$ во всей группе P, или $\chi(y; Q) < \chi(y; P)$. Из изоморфизма (4) легко вывести, что каждый элемент группы Q, обладающий бесконечной высотой во всей группе P, обладает бесконечной высотой также в подгруппе Q. Но это значит, что $k = \chi(y; P) < \infty$. Притом, если $x \in P$ — такой элемент, что $p^k x = y$, то будет также $p^{k-1}(px) = y$; но в силу (4) имеет место соотношение: $px \in Q$. Таким образом мы доказали справедливость неравенств

$$k - 1 \leqq \chi(y; Q) < k\,,$$

или справедливость равенства

$$\chi(y; Q) = k - 1\,.$$

Так как $p^{k-1}(px) = y$, то по хорошо известной теореме из теории абелевых групп (смотри [1], стр. 80, следствие 24.2), циклическая группа $\{px\}$ служит для группы Q прямым слагаемым:

$$Q = \{px\} \dotplus Q_1\,.$$

Так как $x \operatorname{non} \in Q$, то из (4) следует, что $\{x, Q\} = P$, или ввиду последнего прямого разложения группы Q, также будет

$$P = \{x, Q_1\}\,. \tag{6}$$

Пусть n — целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqq n < p^{k+1}$, и пусть $nx \in \{x\} \cap Q_1$. Если бы было $(p, n) = 1$, то должно было бы быть

$$\{x\} = \{nx\} \subseteq Q_1 \subseteq Q\,,$$

но это невозможно, так как $x \operatorname{non} \in Q$. Итак, $n = pn_1$, и

$$nx = n_1(px) \in \{px\} \cap Q_1\,,$$

или $n_1 px = \mathbf{0}$ и $p^k | n_1$, так как элемент px — порядка p^k. Это значит, что $p^{k+1} | n$, или, ввиду неравенства $0 \leqq n < p^{k+1}$, должно быть $n = 0$. Но элемент x — в точности порядка p^{k+1}, и тем самым мы доказали, что $\{x\} \cap Q_1 = (\mathbf{0})$. Отсюда и из соотношения (6) непосредственно вытекает прямое разложение $P = \{x\} \dotplus Q_1$.

Этим лемма полностью доказана.

Лемма 5. *Пусть G — смешанная группа, периодическая часть которой является p-примарной группой, и пусть H — такая подгруппа группы G, что имеет место изоморфизм* (3). *Если группа G расщепляема, то будет расщепляемой и подгруппа H.*

Доказательство. Если P — периодическая часть группы G и если Q — периодическая часть группы H, то по лемме 3 возможны только два различных случая: или $P = Q$, или $P/Q \cong C(p)$.

а) Если $Q = P$, то из прямого разложения $G = A \dotplus P$ группы G непосредстредственно вытекает прямое разложение подгруппы H,

$$H = (A \cap H) \dotplus P,$$

или подгруппа H является расщепляемой.

б) Пусть $Q \subsetneqq P$ или $P/Q \cong C(p)$. По лемме 4 существуют подгруппа $Q_1 \subseteq Q$ и элемент $x \in P$ такие, что

$$P = \{x\} \dotplus Q_1, \quad Q = \{px\} \dotplus Q_1.$$

Итак, если $G = A \dotplus P$, то также будет $G = A \dotplus \{x\} \dotplus Q_1 = G_1 \dotplus Q_1$, где для простоты полагаем $G_1 = A \dotplus \{x\}$. Так как $Q_1 \subseteq H$, то из прямого разложения группы G следует прямое разложение подгруппы H:

$$H = (G_1 \cap H) \dotplus Q_1 = H_1 \dotplus Q_1, \tag{7}$$

где пишем $H_1 = G_1 \cap H \subseteq G_1$. Но тогда периодическая часть группы H_1, являясь подгруппой периодической части группы G_1, должна быть конечной, так как периодической частью группы G_1 служит конечная циклическая группа $\{x\}$. Это значит, что группа H_1 расщепляема (смотри [1], стр. 80, следствие 24.6), и таким образом расщепляемой будет и группа H, как следует из формулы (7).

Этим доказательство леммы закончено.

Лемма 6. *Пусть G — расщепляемая смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что $G/H \cong C(p)$. Тогда подгруппа H является также расщепляемой.*

Доказательство. Если P — периодическая часть группы G, то ввиду того, что G расщепляема, будет

$$G = A \dotplus P^{(p)} \dotplus P_*^{(p)}.$$

Подгруппу H можно тогда выразить в виде прямой суммы

$$H = H_1 \dotplus P_*^{(p)} \tag{8}$$

(смотри лемму 1 и лемму 2), где будет $H_1 \subseteq A \dotplus P^{(p)} = G_1$. Тогда имеем

$$C(p) \cong G/H = (G_1 \dotplus P_*^{(p)})/(H_1 \dotplus P_*^{(p)}) \cong G_1/H_1.$$

Пользуясь теперь леммой 5, из расщепляемости группы $G_1 = A \dotplus P^{(p)}$ можем вывести расщепляемость подгруппы H_1 и таким образом, в силу соотношения (8), расщепляемость группы H; этим мы и завершили доказательство леммы.

Теорема 1. *Пусть G — расшепляемая смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является конечной группой. Тогда подгруппа H является также расщепляемой.*

Доказательство. Теорему докажем методом полной индукции по длине композиционного ряда фактор-группы $\tilde{G} = G/H$.

Если группа $\tilde{G} = G/H$ обладает композиционным рядом длины 1, то группа G/H является циклической группой порядка простого числа p, и утверждение теоремы следует из леммы 6.

Итак пусть группа $\tilde{G} = G/H$ обладает композиционным рядом длины $r > 1$, пусть

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 \underset{\neq}{\supset} \tilde{G}_1 \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\subset} \tilde{G}_{r-1} \underset{\neq}{\supset} \tilde{G}_r = (0) \tag{9}$$

— какой-то её композиционный ряд, и пусть теорема справедлива во всяком случае, когда фактор-группа обладает композиционным рядом длины $r - 1$. Если G_1 — такая подгруппа группы G, что $H \subseteq G_1$ и $G_1/H = \tilde{G}_1$, то ввиду того, что (9) является композиционным рядом, будет

$$G/G_1 \cong \tilde{G}/\tilde{G}_1 \cong C(p)$$

для какого-то простого числа p или, по лемме 6, группа G_1 является расщепляемой. Но одновременно фактор-группа $\tilde{G}_1 = G_1/H$ обладает композиционным рядом длины $r - 1$,

$$\tilde{G}_1 \underset{\neq}{\subset} \tilde{G}_2 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\supset} \tilde{G}_{r-1} \underset{\neq}{\supset} \tilde{G}_r = (0) ,$$

или по индуктивному предположению из расщепляемости группы G_1 следует расщепляемость её подгруппы H.

Этим доказательство методом полной индукции завершено и теорема полностью доказана.

Лемма 7. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P и пусть существует такая расщепляемая подгруппа G_1 группы G, что $\{G_1, P\} = G$. Тогда сама группа G также расщепляема.*

Доказательство. Если, например, $G_1 = A_1 \dotplus P_1$, где P_1 — периодическая часть подгруппы G_1, то, ввиду предположения о подгруппе G_1, будет

$$G = \{G_1, P\} = \{A_1, P_1, P\} = \{A_1, P\} ,$$

или $G = A_1 \dotplus P$, так как $A_1 \cap P = (0)$.

Лемма 8. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что $G/H \cong C(p)$. Если подгруппа H расщепляема, то группа G является также расщепляемой.*

Доказательство. Подгруппа H является по предположению расщепляемой и в силу этого можно её выразить в виде прямой суммы $H =$

$= A \dotplus Q$, где Q — периодическая часть группы H. Если y — произвольный элемент группы G, непринадлежащий подгруппе H, то

$$G = \{H, y\}\,; \tag{10}$$

притом уже будет $py \in H$ или $py = a + b$, где $a \in A$, $b \in Q$. Символом G_1 обозначим теперь подгруппу группы G_1 определенную формулой $G_1 = \{A, y\}$. Тогда каждый элемент g группы G_1 можно выразить в виде $g = a' + ny$, где $a' \in A$ и n — целое рациальное число. Если символом h обозначим порядок элемента $b \in Q$, то будет $phg = pha' + nha \in A$. Но так как A является группой без кручения, то для того, чтобы элемент g обладал конечным порядком, очевидно, должно быть $phg = pha' + nha = \mathbf{0}$. Таким образом мы доказали, что периодическая часть P_1 подгруппы G_1 обладает ограниченными порядками элементов, или (смотри [1], стр. 80, теорема 24.5) подгруппа G_1 — расщепляема. Притом легко видеть, что $H \subseteq \{G_1, P\}$, и так как $y \in \{G_1, P\}$ (здесь символом P обозначаем периодическую часть всей группы G), то в силу формулы (10) будет $G = \{G_1, P\}$. Но воспользовавшись леммой 7 и расщепляемостью подгруппы G_1, можем уже утверждать, что группа G расщепляема и лемма полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является конечной группой. Если подгруппа H расщепляема, то будет расщепляемой и вся группа G.*

Доказательство. Пользуясь леммой 8, можем теорему доказать методом полной индукции по длине композиционного ряда фактор-группы G/H аналогично тому, как была доказана теорема 1.

Теорему 1 и теорему 2 можно высказать в виде единственной теоремы следующим образом.

Теорема 3. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является конечной группой. В этом случае группы G будет расщепляемой тогда и только тогда, когда расщепляема подгруппа H.*

Только что высказанную теорему можно ещё немножко обобщить. Это обобщение заключено в следующей теореме:

Теорема 4. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является прямой суммой свободной абелевой группы и конечной группы. Группа G будет расщепляемой тогда и только тогда, когда расщепляема подгруппа H.*

Доказательство. По предположению можно выразить фактор-группу $\tilde{G} = G/H$ в виде прямой суммы $\tilde{G} = \tilde{F} \dotplus \tilde{K}$, где $\tilde{F}$ — свободная абелева группа и $\tilde{K}$ — конечная группа. Пусть K — такая подгруппа группы G

$(H \subseteq K \subseteq G)$, что в точности $\tilde{K} = K/H$. Так как $\tilde{F} \cong \tilde{G}/\tilde{K}$, то по второй теореме об изоморфизме будет также

$$\tilde{F} \cong \tilde{G}/\tilde{K} \cong G/K ;$$

группа $\tilde{F}$ является по предположению свободной абелевой группой, итак, в силу хорошо известной теоремы из теории абелевых групп (смотри [1], § 9, стр. 38, теорема 9.2), подгруппа K должна быть прямым слагаемым группы G: $G = F \dotplus K$. Очевидно, что имеет место изонорфизм

$$F \cong G/K \cong \tilde{F} ,$$

или группа F является также свободной абелевой группой. Но это значит, что периодическая часть подгруппы K служит периодической частью для всей группы G, или, как легко видеть, группа G будет расщепляемой тогда и только тогда, когда расщепляема подгруппа K. Так как $K/H = \tilde{K}$ и $\tilde{K}$ — конечная группа, то можно применить теорему 3 к группе K и её подгруппе H и можно, наконец, получить таким образом утверждение теоремы.

Для дальнейших рассуждений введем следующее определение:

Определение. *Периодическую группу P назовем $\mathfrak{S}$-группой, если каждый её p-примарной фактор $P^{(p)}$ является прямой суммой полной группы и группы с ограниченными порядками элементов.*

Лемма 9. *Пусть P —периодическая p-примарная группа и пусть Q — такая подгруппа группы P, что $P/Q \cong C(p^\infty)$. Если группа P является $\mathfrak{S}$-группой, то $\mathfrak{S}$-группой будет и подгруппа Q.*

Доказательство. Если группа P является $\mathfrak{S}$-группой, то её можно выразить в виде прямой суммы

$$P = U \dotplus K , \tag{11}$$

где U — полная группа и K — группа с ограниченными порядками элементов. Тогда подгруппа K является, очевидно, редуцированной группой, или подгруппа U должна быть максимальной полной подгруппой группы P. Итак, если символом V обозначим максимальную полную подгруппу группы Q, то, ввиду только что сказанного, будет $V \subseteq U$. Если бы имело место равенство $V = U$, то в силу ограниченности группы K должна была бы быть ограниченной и фактор-группа P/Q, что противоречит предположению леммы. Итак мы можем предполагать, что $U = V \dotplus U'$, где U' — ненулевая полная группа. Прежде всего докажем, что $U' \cong C(p^\infty)$.

Группу P и её подгруппу Q быразим в виде прямой суммы

$$P = V \dotplus U' \dotplus K , \quad Q = V \dotplus L ,$$

где $L \subseteq U' \dotplus K$. Отметим ещё, что прямое слагаемое L является редуцированной группой. Итак, для фактор-группы P/Q имеет место изоморфизм

$$C(p^\infty) \cong P/Q \cong (U' \dotplus K)/L \,. \tag{12}$$

Подгруппа $\{U', L\}/L$ группы $(U' \dotplus K)/L$ является очевидно, полной группой, или из справедливости формулы (12) вытекает уже соотношение

$$(U' \dotplus K)/L = \{U', L\}/L \cong C(p^\infty) \,.$$

Отсюда, воспользовавшись первой теоремой об изоморфизме, можем вывести формулу

$$U'/(U' \cap L) \cong C(p^\infty) \,. \tag{13}$$

Положим для простоты $U' \cap L = L'$; так как L — редуцированная группа, то редуцированной будет и группа L'. Это значит, что если Z' — произвольная полная группа Прюфера, содержащаяся в группе U', то пересечение $Z' \cap L'$ должно быть конечной группой или

$$Z'/(Z' \cap L') \cong C(p^\infty) \,.$$

В силу первой теоремы об изоморфизме отсюда следует, что

$$C(p^\infty) \cong \{Z', L'\}/L' \subseteq U'/L' \,.$$

Из последнего соотношения и из (13) получаем уже равенство

$$U'/L' = \{Z', L'\}/L'$$

и, наконец, равенство

$$U' = \{Z', L'\} \,. \tag{14}$$

Полную группу U' можно выразить в виде прямой суммы $U' = Z' \dotplus Z''$; прямое слагаемое Z'' является опять полной группой и имеет место изоморфизм $Z'' \cong U'/Z'$. Имея в виду соотношение (14), из последнего изоморфизма получим изоморфизм

$$Z'' \cong \{Z', L'\}/Z' \cong L'/Z' \cap L' \,; \tag{15}$$

притом $Z' \cap L'$ является редуцированной подгруппой полной группы Прюфера или группой конечной. Но так как фактор-группа редуцированной периодической группы по конечной подгруппе является опять редуцированной группой, то из соотношения (15) уже следует, что $Z'' = (\boldsymbol{0})$. Но этим доказано, что $U' = Z' \cong C(p^\infty)$.

Таким образом мы доказали, что редуцированная группа L служит подгруппой для группы, являющейся прямой суммой группы типа $C(p^\infty)$ и p-примарной группы с ограниченными порядками элементов. Но легко убедиться в том, что в таком случае группа L должна также быть группой с ограниченными порядками элементов. Итак, из прямого розложения $Q = V \dotplus L$, где V — полная группа, уже следует утверждение леммы.

Воспользовавшись только что доказанной леммой, методом полной индукции можем доказать следующую лемму.

Лемма 10. *Пусть P — периодическая p-примарная группа и пусть Q — такая подгруппа группы Q, что фактор-группа P/Q является прямой суммой конечного числа слагаемых типа $C(p^\infty)$. Если группа P является $\mathfrak{S}$-группой, то $\mathfrak{S}$-группой будет и подгруппа Q.*

Лемма 11. *Пусть P — периодическая p-примарная группа и пусть Q — такая подгруппа группы P, что фактор-группа P/Q является редуцированной группой. Если группа P является $\mathfrak{S}$-группой, то $\mathfrak{S}$-группой будет и подгруппа Q.*

Доказательство. Пусть U — максимальная полная подгруппа группы Q. Тогда группу P и её подгруппу Q можно выразить в виде прямой суммы

$$P = U \dotplus P_1, \quad Q = U \dotplus Q_1,$$

где $Q_1 \subseteq P_1$. Итак, имеет место изоморфизм

$$P/Q = (U \dotplus P_1)/(U \dotplus Q_1) \cong P_1/Q_1,$$

или фактор-группа P_1/Q_1 является также редуцированной группой. Группа Q_1 является редуцированной, следовательно, группа P_1 должна быть равным образом редуцированной группой, так как в противном случае фактор-группа P_1/Q_1 обладала бы ненулевой полной группой. В силу того, что группа P является $\mathfrak{S}$-группой, группа P_1 будет уже группой с ограниченными порядками элементов и такой же будет и её подгруппа Q_1. Но этим уже полностью доказано, что группа Q является $\mathfrak{S}$-группой, чем доказательство леммы завершено.

Лемма 12. *Пусть P — периодическая p-примарная группа и пусть Q — такая подгруппа группы P, что максимальная полная подгруппа фактор-группы P/Q является прямой суммой конечного числа полных групп типа $C(p^\infty)$. Если группа P является $\mathfrak{S}$-группой, то $\mathfrak{S}$-группой будет и подгруппа Q.*

Доказательство. Пусть P_1 — такая подгруппа группы P, что $Q \subseteq P_1$ и фактор-группа P_1/Q служит для группы P/Q максимальной полной подгруппой. Но тогда фактор-группа $(P/Q)/(P_1/Q)$ должна быть уже группой редуцированной, или, в силу второй теоремы об изоморфизме, редуцированной группой будет и фактор-группа P/P_1. Итак, из леммы 11 следует, что подгруппа P_1 группы P является $\mathfrak{S}$-группой.

Так как фактор-группа P_1/Q является максимальной полной подгруппой группы P/Q, то по предположению леммы она будет прямой суммой конечного числа групп типа $C(p^\infty)$. В таком случае, в силу леммы 10, подгруппа Q должна быть $\mathfrak{S}$-группой, и лемма полностью доказана.

Теорема 5. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа G/H является периодической p-примарной группой, максимальная полная подгруппа которой является прямой суммой конечного числа групп типа $C(p^\infty)$. Если p-примарное слагаемое $P^{(p)}$ периодической части P группы G является $\mathfrak{S}$-группой, то группа G будет расщепляемой тогда и только тогда, когда расщепляема подгруппа H.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что если обозначим символом Q периодическую часть подгруппы H, то по лемме 1 будет $Q_*^{(p)} = P_*^{(p)}$.

Пусть сначала расщепляема подгруппа H. В таком случае группа $Q_*^{(p)} = P_*^{(p)}$ служит для группы H прямым слагаемым, или, по лемме 2, группа $P_*^{(p)}$ служит прямым слагаемым для всей группы G: $G = G_1 \dotplus P_*^{(p)}$. Как легко видеть, периодической частью группы G_1 является в точности группа $P^{(p)}$, но так как она по предположению является $\mathfrak{S}$-группой, то $P^{(p)}$ служит прямым слагаемым для группы $G_1 : G_1 = A \dotplus P^{(p)}$. Итак, мы получаем прямое разложение группы G, $G = A \dotplus P^{(p)} \dotplus P_*^{(p)} = A \dotplus P$. Но это значит, что группа G является расщепляемой.

Пусть теперь наоборот расщепляемой является группа $G : G = A \dotplus (P^{(p)} \dotplus P_*^{(p)})$. Тогда, по той же лемме 2, подгруппа $P_*^{(p)} = Q_*^{(p)}$ является прямым слагаемым подгруппы H: $H_1 = H_1 \dotplus P_*^{(p)}$; притом прямое слагаемое H_1 может быть избрано таким образом, что $H_1 \subseteq A \dotplus P^{(p)} = G_1$. Это значит, что имеет место изоморфизм

$$G/H = (G_1 \dotplus P_*^{(p)})/(H_1 \dotplus P_*^{(p)}) \cong G_1/H_1 \,. \tag{16}$$

Периодической частью подгруппы H_1 является, очевидно, группа $Q^{(p)}$, или $H_1 \cap P^{(p)} = Q^{(p)}$. Итак, по первой теореме об изоморфизме имеем

$$P^{(p)}/Q^{(p)} = P^{(p)}/(H_1 \cap P^{(p)}) \cong \{H_1, P^{(p)}\}/H_1 \subseteq G_1/H_1 \,. \tag{17}$$

Из соотношений (16) и (17) в силу предположения леммы следует, что максимальная полная подгруппа фактор-группы $P^{(p)}/Q^{(p)}$ является прямой суммой конечного числа групп типа $C(p^\infty)$, или, по лемме 12, группа $Q^{(p)}$ является $\mathfrak{S}$-группой. Но в таком случае группа $Q^{(p)}$ служит прямым слагаемым для группы H_1, или группа H_1 является расщепляемой. Этим доказано, что расщепляема сама группа H.

Итак, теорема полностью доказана.

Перед формулировкой следующей теоремы напомним, что периодическая группа P называется Π-примарной (где Π—какое-то непустое множество положительных простых чисел), если порядок любого элемента группы P можно выразить в виде произведения степеней простых чисел множества Π.

Теорема 6. *Пусть G — смешанная группа и пусть H — такая подгруппа группы G, что фактор-группа $\tilde{G} = G/H$ является периодической Π-при-*

марной группой, где Π—конечное множество простых чисел. Пусть, далее, для каждого простого числа $p \in \Pi$ максимальная полная подгруппа p-примарного слагаемого $\tilde{G}^{(p)}$ группы $\tilde{G}$ является прямой суммой конечного числа групп типа $C(p^\infty)$. Если периодическая часть группы G является $\mathfrak{S}$-группой, то группа G будет расщепляемой тогда и только тогда, когда расщепляема подгруппа H.

Доказательство. Теорему докажем методом полной индукции по числу элементов множества Π.

Если множество Π состоит из одного только элемента p, то утверждение теоремы следует из теоремы 5.

Итак, пусть теперь множество Π состоит из n $(n > 1)$ простых чисел p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и пусть теорема уже справедлива всегда, когда множество Π содержит только $n - 1$ элементов. Фактор-группу $\tilde{G} = G/H$ можно выразить в виде прямой суммы.

$$\tilde{G} = \tilde{G}^{(p_1)} \dotplus \tilde{G}^{(p_2)} \dotplus \ldots \dotplus \tilde{G}^{(p_n)} = \tilde{G}^{(p_1)} \dotplus \tilde{G}_*^{(p_1)} . \tag{18}$$

Пусть G_1 — такая подгруппа группы G, что $H \subseteq G_1$ и $\tilde{G}_*^{(p_1)} = G_1/H$. В силу второй теоремы об изоморфизме и в силу (18) будет

$$G/G_1 \cong (G/H)/(G_1/H) = \tilde{G}/\tilde{G}_*^{(p_1)} \cong \tilde{G}^{(p_1)} . \tag{19}$$

Итак, воспользовавшись теоремой 5 можем утверждать, что группа G расщепляема тогда и только тогда, когда расщепляема подгруппа G_1. Применением леммы 12 и соотношения (19) мы легко убедились бы в том, что периодическая часть подгруппы G_1 является $\mathfrak{S}$-группой (смотри доказательство теоремы 5, соотношение (17)). Но так как

$$G_1/H = \tilde{G}_*^{(p_1)} = \tilde{G}^{(p_2)} \dotplus \ldots \dotplus \tilde{G}^{(p_n)} ,$$

то по предположению индукции группа G_1 будет расщепляемой тогда и только тогда, когда расщепляема подгруппа H.

Этим теорема полностью доказана.

В заключение приведем ещё две теоремы, иллюстрирующие применение теоремы 3 и теоремы 6. Доказательства этих теорем дадим в другой статье, посвященной исключительно вопросу расщепляемости фактор-групп абелевых групп конечного ранга без кручения.

Если J — группа без кручения ранга 1, то символом $typ\ J$ условимся обозначать тип группы J. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Если G — группа без кручения конечго ранга $r \geqq 1$, являющаяся прямой суммой групп ранга* 1,

$$G = J_1 \dotplus J_2 \dotplus \ldots \dotplus J_r ,$$

и если $typ\ J_{k+1} \leqq typ\ J_k$ $(k = 1, \ldots, r - 1)$, то всякая фактор-гриппа G/H группы G является расщепляемой группой.

Группу без кручения G, обладающую тем свойством, что всякая её фактор-группа G/H является расщепляемой, назовём факторно расщепляемой группой. Кроме того, введем ещё следующее обозначение: Если τ_i ($i = 1, 2$) — два типа абелевых групп ранга 1 без кручения, то будем писать $\tau_1 \equiv \tau_2$, когда для произвольных характеристик $\chi_i \in \tau_i$, $\chi_i = (k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \ldots)$ ($i = 1, 2$) имеет место равенство $k_n^{(i)} = k_n^{(2)}$ для всех натуральных чисел n, кроме, быть может, конечного числа. Сейчас отметим ещё, что это определение отличается от определения эквивалентности характеристик, так как неравенство $k_n^{(1)} \neq k_n^{(2)}$ допускаем и в том случае, когда некоторое $k_n^{(i)}$ ($i = 1, 2$) равно символу ∞.

Теорема 8. *Пусть $G^{(i)}$ ($i = 1, 2$) — две группы без кручения конечного ранга $r \geqq 1$, являющиеся прямыми суммами групп ранга* 1:

$$G^{(i)} = J_1^{(i)} \dotplus J_2^{(i)} \dotplus \ldots \dotplus J_r^{(i)} \quad (i = 1, 2)\,.$$

Если тип $J_k^{(1)} \equiv$ тип $J_k^{(2)}$ ($k = 1, 2, \ldots, r$), то группа $G^{(1)}$ будет факторно расщепляемой тогда и только тогда, когда факторно расщепляема группа $G^{(2)}$.

Замечание. Теорема 7 описывает какой-то класс факторно расщепляемых абелевых групп конечного ранга без кручения. Теоремой 8 дана возможность этот класс ещё расширить.

Литература

[1] *L. Fuchs*: Abelian groups, Budapest, 1958.
[2] *А. Г. Курош:* Теория групп, 2-ое издание, Москва, 1953.

Zusammenfassung

BEMERKUNG ÜBER DIE SPALTBARKEIT DER GEMISCHTEN ABELSCHEN GRUPPEN

LADISLAV PROCHÁZKA, Prag

(Eingegangen am 22. Juni 1959)

Eine gemischte abelsche Gruppe G heisst spaltbar, wenn die maximale periodische Untergruppe P der Gruppe G direkter Summand von G ist. In dieser Arbeit werden vor allem Bedingungen gesucht, unter welchen aus der Spaltbarkeit der gemischten Gruppe die Spaltbarkeit der Untergruppen folgt, und umgekehrt, unter welchen Bedingungen man aus der Spaltbarkeit einer Untergruppe die Spaltbarkeit der ganzen Gruppe ableiten kann.

Es sei noch bemerkt, dass in der ganzen Arbeit mit dem Wort Gruppe immer eine abelsche Gruppe gemeint ist.

Zuerst wurde folgender Satz bewiesen:

Satz 3. *G sei eine gemischte Gruppe und H eine solche Untergruppe der Gruppe G, für welche die Faktorgruppe G/H endlich ist. Unter diesen Voraussetzungen ist die Gruppe G dann und nur dann spaltbar, wenn die Untergruppe H spaltbar ist.*

Dieser Satz kann noch gewissermassen verallgemeinert werden und so gelangt man zu

Satz 4. *G sei eine gemischte Gruppe und H eine Untergruppe der Gruppe G, deren Faktorgruppe G/H als eine direkte Summe einer freien abelschen Gruppe und einer endlichen Gruppe darstellbar ist. So ist die Gruppe G genau dann spaltbar, falls die Untergruppe H spaltbar ist.*

Definition. Eine periodische Gruppe P nennt man eine $\mathfrak{S}$-Gruppe, wenn jeder p-primäre Faktor $P^{(p)}$ der Gruppe P eine direkte Summe einer vollständigen Gruppe und einer ordnungsbeschränkten Gruppe ist.

Bevor wir den nächsten Satz formulieren, erinnern wir noch an diese Erklärung: Eine periodische Gruppe P heisst die Π-primäre Gruppe (wo Π eine nichtleere Menge von positiven Primzahlen ist), wenn die Ordnung jedes Elementes der Gruppe P als ein Produkt von Potenzen der Primzahlen aus der Menge Π ausgedrückt werden kann.

Satz 6. *G sei eine gemischte Gruppe und H eine solche Untergruppe der Gruppe G, deren Faktorgruppe $\tilde{G} = G/H$ eine periodische Π-primäre Gruppe ist, wobei mit dem Symbol Π eine endliche Menge von Primzahlen bezeichnet wurde. Für jede Primzahl $p \in \Pi$ sei die maximale vollständige Untergruppe des p-primären Faktors $\tilde{G}^{(p)}$ der Gruppe $\tilde{G}$ eine direkte Summe von endlich vielen Faktoren vom Typ $C(p^\infty)$ (d. h., dass sie einen endlichen D-Rang besitzt). Ist die maximale periodische Untergruppe der Gruppe G eine $\mathfrak{S}$-Gruppe, so ist die Gruppe G genau dann spaltbar, wenn die Untergruppe H spaltbar ist.*

Am Ende der vorliegenden Bemerkung sind noch zwei Sätze formuliert, die als eine Anwendung der vorhergehenden Sätze dienen können, aber die hier nicht bewiesen sind; Die Beweise dieser Sätze kann der Leser in einer anderen Arbeit des Autors finden.