Czechoslovak Mathematical Journal

Froim Marcus

# L'élément linéaire projectif d'une congruence de droites parabolique dans $S_5$

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 11 (1961), No. 1, 57–61

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100442

Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

# L'ÉLÉMENT LINÉAIRE PROJECTIF D'UNE CONGRUENCE DE DROITES PARABOLIQUE DANS $S_5$

FROIM MARCUS, Jassy

(Reçu le 24 septembre 1959, après modifications le 9 août 1960)

On définit l'élément linéaire projectif pour une congruence parabolique de droites dans $S_5$.

**1.** Dans un Mémoire en cours de publication [1] je définis l'élément linéaire projectif d'une congruence de droites dans $S_5$. Dans [2] A. ŠVEC définit l'élément linéaire projectif d'une congruence dans $S_{2n+1}$. Entre ces définitions il existe la différence suivante:

L'élement défini dans [2] se réduit pour $n = 1$, c'est-à-dire dans un $S_3$, à l'élément défini par A. TERRACINI [3], tandis que celuit défini en [1], se réduit dans le cas des congruences quadratiques dans $S_5$, à l'élément linéaire projectif defini par B. SEGRE [4].

Soit en [1] qu'en [2], on considère seulement le cas des congruences non-paraboliques. Mais en utilisant quelques résultats de Terracini [5], [6], on peut définir aussi l'élément linéaire projectif pour une congruence parabolique dans un $S_5$. C'est le but de cette Note.

**2.** Soit $\Gamma$ une congruence de droites engedrée par les tangentes aux lignes caractéristiques d'une surface $(y^*)$ de $S_5$, représentée par une équation du type parabolique

$$y^*_{uu} = \alpha y^*_u + \beta y^*_v + \gamma y^* \tag{1}$$

avec $\beta \neq 0$. On peut supposer [6] que les six points

$$y^*\,,\; y^*_u\,,\; y^*_v\,,\; y^*_{uv}\,,\; y^*_{vv}\,,\; y^*_{uvv}\,,$$

soient linéairement indépendants, et alors la surface $(y^*)$ est aussi représentée par [6]

$$y^*_{vvv} = A_1 y^* + B_1 y^*_u + C_1 y^*_v + D_1 y^*_{uv} + \rho_1 y^*_{vv} + \varepsilon_1 y^*_{uvv}\,. \tag{2}$$

En conséquence, la congreunce parabolique $\Gamma$ de $S_5$ peut être représentée [6] par le système (1) et (2) avec $\beta \neq 0$.

3. Dans son important Mémoire [5], A. Terracini considère l'incidence d'un système $\Theta$, c'est-à-dire, d'un système de $\infty^{\bar{\alpha}} (2 \leqq \bar{\alpha} \leqq 3)$ plans dans $S_5$ dont deux plans consécutifs sont toujours incidents dans un point, avec l'ordre d'aproximation

$\sigma \geqq 2$. Ces plans passent par les droites d'une variété réglée $U_3$, dotée d'un $S_3$ tangent fixe le long de chaque génératrice, et sont situés dans les $S_3$ tangents relatifs. Comme, dans cette hypothèse, la variété $U_3$ ne diffère pas d'une congruence de droites ([5] pag. 446), Terracini assimile l'étude des systèmes $\Theta$, à l'étude des congruences $\Gamma$, supports des plans $\Theta$, et s'occupe des systèmes $\Delta$ de $\infty^1$ plans contenus dans les systèmes $\Theta$, et qui réalisent une incidence avec une aproximation $\sigma \geqq 4$.

Par analogie avec le mode de comportement des plans tangents à une surface de $S_5$ dans les points d'une ligne principale, Terracini [5] nomme les systèmes $\Delta$, systèmes principaux des systèmes $\Theta$.

**4.** Soit $\Gamma$ une congruence de droites parabolique de $S_5$, support d'un système $\Theta$. Le plan qui décrit le système $\Theta$, est determiné [6] par les points $y^*$, $y^*_u$, et par un troisième, situé sur la droite $(y^*_v, y^*_{uv})$. Dans ce cas, le système $\Theta$ contient généralement trois systèmes principaux distincts de ceux qui correspondent au système des caractéristiques de la surface $(y^*)$, unique nappe focale de la congruence, et qui ne peuvent être indéterminés [6].

Les coordonnées du point $y^*$ peuvent être multipliées par un même facteur $\lambda(u,v) \neq 0$. En posant

$$y = \lambda y^* , \tag{3}$$

nous allons choisir ce facteur de manière que le plan qui décrit le système $\Theta$ soit determiné par les points $y$, $y_u$, $y_{uv}$ [6]. En conséquence

$$y_{uu} = a y_u + b y_v + c y , \quad (b \neq 0) \tag{1'}$$

et

$$y_{vvv} = Ay + By_u + Cy_v + Dy_{uv} + \rho y_{vv} + \varepsilon y_{uvv} , \tag{2'}$$

determinent par rapport aux nouvelles coordonées $y$, la congruence parabolique $\Gamma$ de $S_5$, et l'équation différentielle des systèmes principaux différents du système $v = \text{const}$ est [6]

$$E\left(\frac{dv}{du}\right)^3 - N\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - P\frac{dv}{du} - 2b^2 = 0 , \tag{4}$$

où

$$\begin{aligned} E &= \rho_u + 2\varepsilon b_v + c\varepsilon + bD + b\rho\varepsilon , \\ N &= b\varepsilon_u - b\rho + ab\varepsilon + b^2\varepsilon^2 - 3b_v - 3c , \\ P &= 2b^2\varepsilon . \end{aligned} \tag{5}$$

**5.** Dans l'hypothèse qu'on a normalisé les coordonnées du point $y^*$ qui decrit l'unique nappe focale de la congruence de façon que l'équation différentielle des systèmes principaux soit donnée par (4), il résulte que le système (1') et (2') qui complète la représentation de la congruence, admet encore des transformations

$$u = u(\bar{u}) ; \quad v = v(v) . \tag{6}$$

En appliquant au système (1′) et (2′) une transformation (6) et en notant par $\bar{a}$, $\bar{A}$, $\bar{b}$, $\bar{B}$ etc. les nouvelles valeurs des coefficients $a$, $A$, $b$, $B$, etc., nous avons

$$\text{(I)} \qquad \bar{a}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}} = a\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\bar{u}^2}\,; \quad \bar{b}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}} = b\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}}\right)^2;$$

$$\bar{c} = c\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}}\right)^2; \quad \bar{A} = A\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^3;$$

$$\bar{B} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}} = B\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^3; \quad \bar{\varepsilon}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}} = \varepsilon\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\,;$$

$$\bar{\rho}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}} = 3\,\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\bar{v}^2} + \rho\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^2;$$

$$\bar{D}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}} = D\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^3 - \bar{\varepsilon}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}}\cdot\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\bar{v}^2}\,;$$

$$\bar{C}\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}} + \bar{\rho}\,\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\bar{v}^2} = C\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}}\right)^3 + \frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}\bar{v}^3}\,.$$

6. Dans [7], E. Čech a montré qu'à toute congruence non-parabolique de droites de $S_3$ on peut associer quatre formes différentielles invariantes telles que leur somme est égale à l'élement linéaire projectif de Terracini de la congruence.

On peut faire voir qu'à une congruence parabolique de droites de $S_5$ on peut aussi associer quatre formes différentielles invariantes. En effet, il résulte de (I) que les quatre formes

$$\text{(7)} \qquad \phi_1 = -\,2b\varepsilon\,\mathrm{d}u\,; \quad \phi_2 = -\,\frac{N}{b}\,\mathrm{d}v\,;$$

$$F_1 = \frac{E}{b}\,\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}u}\,; \qquad F_2 = -\,2b\,\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}v}$$

sont des invariantes du système normalisé (1′) et (2′) qui détermine la congruence parabolique.

7. Il reste encore à prouver que les quatre formes (7) restent invariantes aussi si l'on considère les normalisations

$$\text{(8)} \qquad \bar{y} = \sigma(v)\,y\,,$$

pour lesquelles on a

$$\text{(9)} \qquad [\bar{y}, \bar{y}_u, \bar{y}_{uv}] = \sigma^3\,[y, y_u, y_{uv}]\,.$$

En posant

$$\text{(1″)} \qquad \bar{y}_{uu} = a_1\bar{y}_u + b_1\bar{y}_v + c_1\bar{y}\,,$$

et

$$\text{(2″)} \qquad \bar{y}_{vvv} = A_1\bar{y} + B_1\bar{y}_u + C_1\bar{y}_v + D_1\bar{y}_{uv} + \rho_1\bar{y}_{vv} + \varepsilon_1\bar{y}_{uvv}\,,$$

et en tenant compte de (8), il résulte

$$\text{(II)} \qquad a_1 = a\,; \quad b_1 = b\,; \quad c_1 = c - b\frac{\sigma'}{\sigma}\,;$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon\,; \quad \rho_1 = \rho + 3\frac{\sigma'}{\sigma}\,; \quad D_1 = D - 2\varepsilon\frac{\sigma'}{\sigma}\,;$$

$$C_1 = C + 3\frac{\sigma''}{\sigma} - 6\frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - 2\frac{\sigma'}{\sigma}\rho\,;$$

$$B_1 = B - \frac{\sigma'}{\sigma}D + \varepsilon\left(2\frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \frac{\sigma''}{\sigma}\right);$$

$$A_1 = A + \frac{\sigma'''}{\sigma} - \frac{\sigma'}{\sigma}\left(C + 3\frac{\sigma''}{\sigma} - 6\frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - 2\rho\frac{\sigma'}{\sigma}\right) - \frac{\sigma''}{\sigma}\left(\rho + 3\frac{\sigma'}{\sigma}\right).$$

D'autre part, en exprimant par

$$\text{(10)} \qquad E_1\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^3 - N_1\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 - P_1\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} - 2b_1^2 = 0\,,$$

l'équation différentielles des systèmes principaux et en tenant compte de (5) et (II)

$$\text{(11)} \qquad E_1 = E\,; \quad N_1 = N\,; \quad P_1 = P\,.$$

Donc

$$\text{(12)} \qquad b_1\varepsilon_1 = b\varepsilon\,; \quad \frac{E_1}{b_1} = \frac{E}{b}\,; \quad \frac{N_1}{b_1} = \frac{N}{b}\,,$$

ce qui démontre qu'une transformation (6) appliquée au système (1″) et (2″) ne change pas les quatre formes différentielles (7).

*En conséquence, la forme différentielle fractionnaire*

$$\text{(III)} \quad J = \frac{E\,\mathrm{d}v^3 - N\,\mathrm{d}v^2\,\mathrm{d}u - 2b^2\varepsilon\,\mathrm{d}u^2\,\mathrm{d}v - 2b^2\,\mathrm{d}u^3}{b\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v} = F_1 + \phi_2 + \phi_1 + F_2\,,$$

*peut être définie comme l'élément linéaire projectif d'une congruence de droites parabolique dans un $S_5$. $J = 0$ est l'équation des systèmes principaux distincts de $v = const$ de l'unique nappe focale de la congruence.*

De (7), il résulte

$$\text{(13')} \qquad \phi_1\phi_2 = 2\varepsilon N\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,; \quad F_1F_2 = -\,2E\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,,$$

et si par exemple $E \neq 0$, nous obtenons, comme dans le cas d'un espace $S_3$, un invariant fini

$$\text{(14)} \qquad \frac{\phi_1\,.\,\phi_2}{F_1\,.\,F_2} = -\frac{\varepsilon N}{E}\,.$$

*Bibliographie*

[1] *F. Marcus:* Elementul liniar proiectiv al unei congruenţe de drepte din $S_5$. Studii şi cercetări ştiinţifice, Matematici, Jaşi, anul. *X*, fascicola 1, 1959, 129—140.
[2] *A. Švec:* Les surfaces *R* dans les espaces projectifs de dimension impaire. Czechoslovak Mathematical Journal, T. *9* (*84*), 1959, 243—264.
[3] *A. Terracini:* Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale delle congruenze di rette. Atti del R. Instituto Veneto di Scienze, T. *XCIV*, 1934—35, 75—86.
[4] *B. Segre:* L'élément linéaire projectif d'une congruence quadratique de droites. Bulletin de l'Ac. Royale de Belgique, 1953, t. *XXXIV*, 481—489.
[5] *A. Terracini:* Nuove ricerche sull'incidenza di piani infinitamente vicini. Atti della R. Accad. Di Torino, Vol. *73*, 1937—38, 443—459.
[6] *A. Terracini:* I sistemi $\Theta$ di piani con congruenza sostegno parabolica. Atti del R. Instituto Veneto di Scienze, 1937—38, T. *XCVII*, 557—565.
[7] *E. Čech:* Transformations développables des congruences de droites. Czechoslovak Mathematical Journal, T. *6* (*81*), 1956, 260—286.



## Резюме

## ЛИНЕЙНЫЙ ПРОЕКТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНГРУЭНЦИИ В $S_5$

ФРОИМ МАРКУС (Froim Marcus), Яссы

В этой работе дается определение линейного проективного элемента параболической прямолинейной конгруэнции в $S_5$. Аналогично случаю напараболической прямолинейной конгруэнции в $S_3$ можно параболической конгруэнции в $S_5$ поставить в соответствие четыре инвариантные дифференциальные формы, данные уравнениями (7); их сумма является линейным проективным элементом рассматриваемой конгруэнции. Приравнивая линейный элемент нулю, мы получим дифференциальное уравнение главных систем единственной фокальной поверхности конгруэнции; см. [5] и [6].