P. I. Petrov

Классификация трехмерных конформно-плоских римановых пространств

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 2, 161–164

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100452

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *11* (*86*) ПРАГА 15. VI. 1961 г., No 2

КЛАССИФИКАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

П. И. ПЕТРОВ, Казань

(Поступило в редакцию 9/VII 1959 г.)

Решается полностью задача некоторой классификации римановых пространств C_3 при помощи понятия характеристики метрического тензора ds^2 многообразий V_3.

1. В заметке [1] с помощью арифметического инварианта (характеристики) неособенной тернарной дифференциальной квадратичной формы

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j\,, \quad g \neq 0 \tag{1}$$

дано новое, конструктивное решение задачи классификации римановых пространств V_3. Под характеристикой формы (1) в [1] разумеется характеристика той линейной векторфункции

$$\mathscr{L} = (L_{ik})\,, \tag{2}$$

которую определяет тензор L_{ik}, связанный с тензором кривизны R_{hijk} этой формы (метрического тензора g_{ij}) посредством известной формулы тензорного анализа

$$R_{hijk} = g_{ik}L_{hj} - g_{ij}L_{hk} + g_{hj}L_{ik} - g_{hk}L_{ij}\,. \tag{3}$$

Ниже при помощи метода классификации римановых многообразий V_3, основанного на понятии характеристики их метрических форм, показывается разбиение конформно-плоских пространств на неэквивалентные непустые классы без общих элементов.

2. На основании теоремы цитированной выше работы (но не в силу теории пары квадратичных форм, изучаемых в алгебре, ибо здесь речь идет о паре (g_{ik}, L_{ik}), коэффициенты которой связаны между собой системой дифференциальных соотношений), линейная векторфункция $\mathscr{L}$ в пространстве трех измерений может обладать одной из шести характеристик

$$[111],\ [(11)\,1],\ [(111)],\ [(21)],\ [21],\ [3]\,. \tag{4}$$

Однако существование пространств C_3, имеющих перечисленные здесь арифметические инварианты, из этой теоремы автоматически не вытекает, так как аналитические условия

$$L_{\alpha[\beta,\gamma]} = 0\,, \tag{5}$$

которые выделяют эти пространства из совокупности всех возможных V_3, при доказательстве леммы упомянутой статьи, следовательно, и теоремы той же статьи, не были учтены. Чтобы получить исчерпывающий ответ на вопрос, существует ли C_3 с любой характеристикой из ряда (4), возьмем неособенные дифференциальные квадратичные формы от трех переменных

(6)

a) $$\mathrm{d}s^2 = e^{2x_1x_2}(\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2)\,,$$

b) $$\mathrm{d}s^2 = e^{2(x_1-x_2)}(\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 - \mathrm{d}x_3^2)\,,$$

c) $$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{x_1^2}(\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2)\,,$$

d) $$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x_1^2 - \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2}{x_1 + x_2}\,,$$

e) $$\mathrm{d}s^2 = \frac{\sqrt{2}}{(x_1 - x_2)^2 \operatorname{Cos}^2 \dfrac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}}(\mathrm{d}x_1^2 - \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2)\,,$$

f) $$\mathrm{d}s^2 = \frac{2}{x_2^2(x_1 + x_3)^2}(\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 - \mathrm{d}x_3^2)\,,$$

и разыщем их характеристики. Оказывается, что формы (6) имеют, соответственно, перечисленные в ряду (4) характеристики. Таким образом получается

Теорема 1. *Множество всевозможных конформно-плоских римановых пространств трех измерений по их характеристикам* [111], [(11) 1], [(111)], [(12]), [12], [3] *разбивается на шесть непустых неэквивалентных классов без общих элементов.*

Сравнивая только что добытый результат с выводом заметки [1], заключаем, что в каждом классе V_3 содержится подкласс C_3 с той же самой характеристикой, что и V_3.

3. Специальный подкласс пространств C_3 образует трехмерные симметрические пространства в смысле Э. Картана. В связи с этим возникает вопрос, имеется ли в каждом классе C_3 подкласс симметрических пространств? Ответить на поставленный вопрос помогут нам нижеследующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Неприводимые симметрические римановы пространства, отличные от многообразий постоянной кривизны, непростого типа.*

Доказательство. Требование $R_{\alpha\beta\gamma\delta,\varepsilon} = 0$, характеризующее симметрическое риманово пространство, для случая $n = 3$ равносильно условию $L_{\alpha\beta,\gamma} = 0$.

Поэтому, из гипотез, что $L_{ij} \neq \rho g_{ij}$, где ρ — постоянное, и что элементарные делители матрицы $\|L_{ij} - \lambda g_{ij}\|$ простые, следовала бы приводимость фундаментальной формы пространства. Следовательно, утверждение леммы справедливо.

Лемма 2. *Характеристики неприводимых симметрических V_3 не могут выражаться символом* [3].

Доказательство. Как следствие условия $L_{ij,p} = 0$, имеем

(7) $$T_{ij,p} = K_p T_{ij},$$

где

$$T_{ij} = L_{ij} e^{-\varphi(x_1 x_2 x_3)}, \quad K_p = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_p}.$$

Пусть $T = (T_{ij})$, $g = (g_{ij})$, $K = g^{-1}T$. Тогда

$$g\|\lambda E - K\| = \|\lambda g - T\|.$$

Значит, степени элементарных делителей матриц K и T, а следовательно, и матриц K и $\mathscr{L}$ совпадают.

Если бы, вопреки утверждению леммы 2, в области $U \subset V_3$ характеристика линейной векторфункции K выражалась символом [3], то существовала бы в каждой точке области U такая координатная система, относительно которой матрицы T и g одновременно приводились бы, соответственно, к видам

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но эта гипотеза несовместима с условием интегрируемости уравнений (7):

(8) $$T_{hj} R^h_{ipq} + T_{ih} R^h_{jpq} = 0.$$

В самом деле, с одной стороны, полагая в (8) $i = j = 3$, $p = 1$, $q = 3$, получаем

(9) $$R_{2313} = 0.$$

С другой стороны, непосредственно вычисляя R_{1323} по формуле (3), находим

(10) $$R_{1323} = -e^{\varphi}.$$

Сопоставляя уравнения (9), (10), замечаем, что предположение, будто бы K имеет характеристику [3], приводит к противоречию.

Теперь докажем теорему, дающую ответ на сформулированный выше вопрос.

Теорема 2. *Неприводимые симметрические римановы пространства трех измерений, отличные от многообразий постоянной кривизны, имеют характеристику* [(12)].

Доказательство. Леммы 1,2 показывают, что пространства, о которых идет речь, могут обладать лишь двумя характеристиками [12], [(12)]. Но в неприводимом пространстве все корни многочлена $|\lambda g_{ik} - T_{ik}| = 0$ равны между собою [2]. Значит, неприводимые симметрические V_3 могут иметь только одну характеристику [(12)]. То, что такой класс пространств действительно существует, иллюстрируется примером d) из п. 2. Таким образом, теорема 2 доказана.

Литература

[1] *Петров П. И.*: Классификация трехмерных римановых пространств по их дифференциальным инвариантам. Учёные записки Казанского унив., 1957, т. *117*, кн. 9, стр. 119—121.
[2] *Patterson E. M.:* On Symmetric Recurrent Tensors of the Second Order. Quart. J. Math. Oxford (*2*), *2* 1951, pp. 151—158.

Résumé

CLASSIFICATION DES ESPACES RIEMANNIENS À TROIS DIMENSIONS CONFORMÉMENT PLATS

P. I. PETROV, Kazan

Nous avons donné dans cette note la classification des espaces C_3 indiqués dans le titre de ce travail.

La classification proposée est basée sur la notion de caractéristique de forme métrique ds^2 des varietés V_3.

Ici on démontre les théorèmes suivants:

Théorème 1. *L'ensemble des espaces riemanniens à trois dimensions conformément plats se distribue selon leurs caractéristiques*

[111], [(11)1], [(111)], [12], [(12)], [3]

en six classes, qui sont non-vides, non équivalentes entre elles, et sans éléments communs.

Théorème 2. *Les variétés riemanniennes symétriques irréducibles à trois dimensions, autres que variétés à courbure constante, ont la caractéristique* [(12)].