Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Havelka

Élément projectif linéaire d'une hypersurface dans un espace à connexion projective

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 2, 249–257

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100458

Чехословацкий математический журнал т. 11 (86) 1961, Прага

ÉLÉMENT PROJECTIF LINÉAIRE D'UNE HYPERSURFACE DANS UN ESPACE À CONNEXION PROJECTIVE

JOSEF HAVELKA, Brno

(Reçu le 12 février 1960)

Dans cet article, l'auteur introduit d'une manière géométrique les courbes de Darboux et l'élément projectif linéaire d'une hypersurface plongée dans un espace à connexion projective et de sa dualisation.

Dans le présent travail, on montre tout d'abord la signification géométrique des tangentes de Darboux d'une hypersurface π dans l'espace $(n + 1)$-dimensionnel S_{n+1} à connexion projective. Les tangentes de Darboux de l'hypersurface π sont déterminnées à l'aide d'une correspondance $\boldsymbol{H}$-linéarisante existant entre les tangentes de l'hypersurface π et celles de sa dualisation π^*. Cela généralise certains résultats des travaux [1] et [2]. A partir des résultats obtenus, on détermine l'élément projectif linéaire Φ de l'hypersurface π, auquel M. G. F. LAPTIEFF est arrivé dans son travail [4] par une voie toute différente, sans connexions avec la dualisation π^* et la correspondance $\boldsymbol{H}$-linéarisante. Ensuite, on détermine, dans le présent travail, l'élément projectif linéaire Φ^* de la dualisation π^*, et l'on démontre que dans un espace projectif les deux éléments projectifs linéaires coïncident. Ainsi, joint aux travaux [1] et [2], le présent travail donne une théorie unique, rendant possible une définition géométrique des tangentes de Darboux de surfaces et d'hypersurfaces, applicable aux espaces projectifs aussi bien qu'aux espaces à connexion projective.

1. Soit donné un espace $(n + 1)$-dimensionnel S_{n+1} à connexion projective par ses équations fondamentales

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \omega_0^0 A + \omega^i A_i + \omega^{n+1} A_{n+1}\,, \\ \mathrm{d}A_i &= \omega_i^0 A + \omega_i^j A_j + \omega_i^{n+1} A_{n+1}\,, \\ \mathrm{d}A_{n+1} &= \omega_{n+1}^0 A + \omega_{n+1}^j A_j + \omega_{n+1}^{n+1} A_{n+1}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

et par les équations de structure

$$[\mathrm{d}\omega_K^L] = [\omega_K^M \omega_M^L] - \tfrac{1}{2} R_{K\alpha\beta}^L [\omega^\alpha \omega^\beta]\,, \tag{2}$$

où $i, j = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, n + 1$; $K, L = 0, 1, \ldots, n + 1$.[1])

---

[1]) Les indices latins minuscules prennent, au cours du travail entier, les valeurs $1, 2, \ldots, n$, les majuscules prennent les valeurs $0, \ldots, n + 1$, tandisque les indices grecs parcourent $1, \ldots, n + 1$.

Les fonctions $R^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (nous écrirons $R^{\alpha}_{\beta\gamma}$ au lieu de $R^{\alpha}_{0\beta\gamma}$) ou encore $R^{L}_{K\beta\gamma}$, sont composantes de tenseurs antisymétriques par rapport aux indices β, γ, de sorte que l'on a

$$R^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = R^{L}_{K(\beta\gamma)} = 0\,.\tag{3}$$ [2])

Nous normaliserons le repère $\mathfrak{R}_A[A, A_1, \ldots, A_{n+1}]$ de telle façon que le déterminant

$$[A, A_1, \ldots, A_{n+1}] = 1\,,\tag{4}$$

d'où il résulte

$$\omega^0_0 + \omega^1_1 + \ldots + \omega^{n+1}_{n+1} = 0\,.\tag{5}$$

Dans l'espace S_{n+1} soit donnée une hypersurface π par l'équation

$$\omega^{n+1} = 0\,.\tag{6}$$

La différentiation extérieure de l'équation (6) donne

$$[\omega^i \omega^{n+1}_i] - \tfrac{1}{2}R^{n+1}_{jk}[\omega^j\omega^k] = 0\,.\tag{7}$$

D'une façon évidente, en vertu du lemme de Cartan, il existe des fonctions $a_{ij} = a_{ji}$ telles que l'on a

$$\omega^{n+1}_i - h_{ik}\omega^k = a_{ik}\omega^k\,,\tag{8}$$

où $h_{ik} = \frac{1}{2}R^{n+1}_{ik}$.

En même temps la matrice

$$\boldsymbol{A} = \|a_{ij}\|\tag{9}$$

est symétrique et nous allons supposer qu'elle soit de rang n. Si nous introduisons de nouvelles fonctions $A_{ij} = a_{ij} + h_{ij}$,[3]) nous pouvons écrire les équations (8) sous la forme

$$\omega^{n+1}_i = A_{ik}\omega^k\,.\tag{10}$$

En différentiant extérieurement le système (10) et en appliquant de nouveau le lemme de Cartan, nous obtenons les équations

$$\mathrm{d}A_{ij} = A_{ik}\omega^k_j + A_{kj}\omega^k_i - A_{ij}(\omega^0_0 + \omega^{n+1}_{n+1}) + A_{ijk}\omega^k\,,\tag{11}$$

d'où il résulte, en vertu de $A_{ij} + A_{ji} = 2a_{ij}$, $A_{ij} - A_{ji} = 2h_{ij}$, que l'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}a_{ij} &= a_{ik}\omega^k_j + a_{kj}\omega^k_i - a_{ij}(\omega^0_0 + \omega^{n+1}_{n+1}) + \tfrac{1}{2}(A_{ijk} + A_{jik})\,\omega^k\,,\\ \mathrm{d}h_{ij} &= h_{ik}\omega^k_j + h_{kj}\omega^k_i - h_{ij}(\omega^0_0 + \omega^{n+1}_{n+1}) + \tfrac{1}{2}(A_{ijk} - A_{jik})\,\omega^k\,.\end{aligned}\tag{12}$$

Pour les calculs qui vont suivre, prolongeons encore une fois le système d'équations différentielles (11), nous obtenons ainsi les équations

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A_{ijk} = {}& A_{ijl}\omega^l_k + A_{ilk}\omega^l_j + A_{ljk}\omega^l_i - A_{ijk}(2\omega^0_0 + \omega^{n+1}_{n+1}) - A_{ij}\omega^0_k -\\ &- A_{ik}\omega^0_j - A_{kj}\omega^0_i + (A_{ij}A_{lk} + A_{jk}A_{il} + A_{ik}A_{lj})\,\omega^l_{n+1} + A_{ijkl}\omega^l\,.\end{aligned}\tag{13}$$

---

[2]) Les parenthèses désignent, ici et dans la suite, la symétrisation.

[3]) Nous conservons, autant que possible, la notation du travail [4].

En raison de nos suppositions, il existe une matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$, inverse à $\boldsymbol{A}$; nous désignerons par a^{ij} ses éléments. Nous avons donc

$$a^{ki}a_{ij} = \delta^k_j \,. \tag{14}$$

La différentiation des équations (14) donne

$$\mathrm{d}a^{rs} = -\,a^{rk}\omega^s_k - a^{ks}\omega^r_k + a^{rs}(\omega^0_0 + \omega^{n+1}_{n+1}) + (.)^{rs}_k\,\omega^k \,. \tag{15}$$

Supposons d'une manière analogue, que la matrice Λ soit, elle-aussi, de rang n, de sorte que nous avons pour les éléments Λ^{ik} de la matrice inverse

$$\mathrm{d}\Lambda^{rs} = -\,\Lambda^{ks}\omega^r_k - \Lambda^{rk}\omega^s_k + \Lambda^{rs}(\omega^0_0 + \omega^{n+1}_{n+1}) + (.)^{rs}_k\,\omega^k \,. \tag{16}$$

2. Dans le travail [7], on a exposé une certaine méthode géométrique d'étude des hypersurfaces dans des espaces à connexion projective. On y montre que l'étude des propriétés locales d'une telle variété est équivalente à l'étude d'une certaine variété à connexion, désignée dans le travail cité par le type $PW^{n-1}_{0,n}$. On y introduit également la notion de dualisation d'une hypersurface dans un espace à connexion projective, ce qui est aussi une variété du type $PW^{n-1}_{0,n}$.

Si l'hypersurface π considérée est déterminée par les équations précédentes et que nous choisissions dans l'espace local de chacun de ses points un repère dual $\mathfrak{R}^*_E$ composé de points de l'espace dual

$$E^K = (-\,1)^K[A, A_1, \ldots, A_{K-1}, A_{K+1}, \ldots, A_{n+1}] \,, \tag{17}$$

alors les équations fondamentales de la dualisation π^* deviennent

$$\mathrm{d}E^K = \Omega^K_L E^L \,. \tag{18}$$

Les matrices $\|\omega^L_K\|$ et $\|\Omega^L_K\|$ sont transposées l'une de l'autre et de signes contraires, de sorte que l'hypersurfaces π^* est donné par les équations

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E^{n+1} &= -\,\omega^{n+1}_{n+1}E^{n+1} - \omega^{n+1}_i E^i \,, \\ \mathrm{d}E^i &= -\,\omega^i_{n+1}E^{n+1} - \omega^i_j E^j - \omega^i E^0 \,, \\ \mathrm{d}E^0 &= -\,\omega^0_{n+1}E^{n+1} - \omega^0_i E^i - \omega^0_0 E^0 \,. \end{aligned} \tag{19}$$

Entre π et π^* il existe une transformation asymptotique $\boldsymbol{T}$. Une homographie générale $\boldsymbol{H}A_K = \alpha_{KL}E^L$ est homographie tangente de la transformation $\boldsymbol{T}$ si

$$\boldsymbol{H}A = E^{n+1} \,, \quad \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}E^{n+1} + \varphi \mathrm{E}^{n+1} \,. \tag{20}$$

À partir des équations (20) nous obtenons pour les coefficients α_{KL} et φ les conditions suivantes:

$$\alpha_{00} = \alpha_{0i} = \alpha_{i0} = 0 \,, \quad \alpha_{0,n+1} = 1 \,, \quad \alpha_{ij} = -\,\Lambda_{ji} \,,$$
$$\varphi = \omega^0_0 + \omega^i\alpha_{i,n+1} + \omega^{n+1}_{n+1} \,;$$

l'homographie tangente générale $\boldsymbol{H}$ est donc déterminée par les équations

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}A &= E^{n+1} \,, \\ \boldsymbol{H}A_i &= -\,\Lambda_{ji}E^j + \alpha_{i,n+1}E^{n+1} \,, \\ \boldsymbol{H}A_{n+1} &= \alpha_{n+1,0}E^0 + \alpha_{n+1,j}E^j + \alpha_{n+1,n+1}E^{n+1} \,. \end{aligned} \tag{21}$$

En différentiant à nouveau les équations (1) et (6), ou bien (19), nous obtenons les équations

$$\text{(22)} \qquad d^2A = (.)A + (d\omega^j + \omega_0^0\omega^j + \omega^i\omega_i^j)\, A_j + a_{ij}\omega^i\omega^j A_{n+1}\,,$$

$$\text{(23)} \quad d^2E^{n+1} = (.)E^{n+1} - \{A_{ijk}\omega^j\omega^k + A_{ij}\,\overline{d\omega^j + \omega_k^j\omega^k - \omega_0^0\omega^j - 2\omega_{n+1}^{n+1}\omega^j}\}\, E^i + \\ + a_{ij}\omega^i\omega^j E^0\,.$$

Nous allons déterminer à présent les coefficients φ_i et φ_0 de telle façon que l'équation

$$\text{(24)} \qquad \mathbf{H}d^2A_0 = d^2E^{n+1} + 2\varphi dE^{n+1} + (.)E^{n+1} + \varphi_i E^i + \varphi_0 E^0$$

soit vérifiée identiquement. Un calcul direct fait voir que

$$\text{(25)} \qquad \begin{aligned} \varphi_0 &= (\alpha_{n+1,0} - 1)\, a_{ij}\omega^i\omega^j\,, \\ \varphi_i &= \{A_{ijk} + a_{jk}\alpha_{n+1,i} + 2\alpha_{k,n+1}A_{ij}\}\, \omega^j\omega^k\,. \end{aligned}$$

A une courbe ϱ de l'hypersurface π, passant par le point A et ayant $t = [A, \omega^i A_i]$ pour sa tangente, il correspond dans la transformation asymptotique $\mathbf{T}$ une courbe ϱ^* de tangente $t^* = [E^{n+1}, \omega_i^{n+1}E^i]$, et dans l'homographie $\mathbf{H}$ la courbe $\mathbf{H}\varrho$. Dans le cas où les courbes ϱ^* et $\mathbf{H}\varrho$ n'ont pas de contact analytique de second ordre, les coefficients φ_i et φ_0 ne sont pas identiquement nuls. La droite $t' = [E^{n+1}, \varphi_i E^i + \varphi_0 E^0]$ est une droite $\mathbf{H}$-linéarisante de direction $\omega^1 : \omega^2 : \ldots : \omega^n$ au sens introduit par E. Čech (t^* et t' sont „droites" de l'espace S_{n+1}^*; dans l'espace S_{n+1}, t^* et t' sont sous-espaces à $(n - 1)$ dimensions).

Nous allons nous borner maintenant aux homographies tangentes pour lesquelles toutes les droites $\mathbf{H}$-linéarisantes sont tangentes à l'hypersurface π^*. La condition nécessaire et suffisante en est

$$\text{(26)} \qquad \alpha_{n+1,0} = 1\,.$$

En vertu des équations (21) et (26) nous avons le

Théorème 1. *Il existe ∞^{2n+1} d'homographies $\mathbf{H}$ tangentes à la transformation asymptotique $\mathbf{T}$, pour lesquelles les droites $\mathbf{H}$-linéarisantes des tangentes de l'hypersurface π sont tangentes à sa dualisation π^*.*

Une homographie $\mathbf{H}$ étant donnée, les tangentes t de l'hypersurface π qui sont situées dans leur droite $\mathbf{H}$-linéarisante t', ont une signification géométrique. Cela a lieu si et seulement si le point $M = \omega^i A_i$ est situé dans l'espace à $(n - 1)$ dimensions L_{n-1}, déterminé par les hyperplans E^{n+1} et $\varphi_i E^i$. L'espace L_{n-1} est donné (en coordonnées locales) par les équations

$$\text{(27)} \qquad x^{n+1} = 0\,, \quad \varphi_i x^i = 0\,.$$

Le point $M(0, \omega^1, \ldots, \omega^n, 0)$ se trouve dans L_{n-1} si et seulement si ses coordonnées satisfont aux équations (27), c'est-à-dire si l'on a

$$\text{(28)} \qquad \varphi_i\omega^i = 0\,,$$

soit aussi

$$\{\Lambda_{ijk} + a_{jk}\alpha_{n+1,i} + 2\alpha_{k,n+1}\Lambda_{ij}\}\,\omega^i\omega^j\omega^k = 0\,. \tag{29}$$

Ecrivons à présent

$$\eta_k = \alpha_{n+1,k} + 2\alpha_{k,n+1}\,, \quad \beta_{ijk} = \eta_{(k}a_{ij)}\,, \quad \tilde{\Lambda}_{ijk} = \Lambda_{(ijk)}\,,$$

alors l'équation (29) pourra être écrite sous la forme (la somme étant étendue à toutes les permutations des indices fixes i, j, k)

$$(\tilde{\Lambda}_{ijk} + \beta_{ijk})\,\omega^i\omega^j\omega^k = 0\,, \tag{30}$$

ou encore brièvement

$$m_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k = 0\,. \tag{31}$$

Les fonctions m_{ijk} sont symétriques par rapport à toute paire d'indices, de sorte que la condition nécessaire et suffisante pour que le cône cubique (31) soit apolaire par rapport au cône asymptotique

$$a_{ij}\omega^i\omega^j = 0\,, \tag{32}$$

est que

$$a^{ij}m_{ijk} = 0\,, \tag{33}$$

soit encore

$$a^{ij}\tilde{\Lambda}_{ijk} + \frac{(n+2)}{3}\eta_k = 0\,, \tag{34}$$

d'où

$$\eta_k = -\frac{3}{(n+2)}\,b_k \tag{35}$$

où $b_k = a^{rs}\tilde{\Lambda}_{rsk}$. Nous avons donc le

Théorème 2. *Il existe* ∞^{n+1} *d'homographies tangentes* $\boldsymbol{H}$ *pour lesquelles le cône cubique* (31) *est apolaire par rapport au cône asymptotique. Le cône* (31) *ne dépend alors pas du choix de l'homographie tangente* $\boldsymbol{H}$.

En vertu de (30) et (35), l'équation du cône cubique, apolaire par rapport au cône asymptotique, sera

$$\{(n+2)\,\tilde{\Lambda}_{ijk} - a_{ij}b_k - a_{jk}b_i - a_{ki}b_j\}\,\omega^i\omega^j\omega^k = 0\,. \tag{36}$$

Si nous posons

$$b_{ijk} = (n+2)\,\tilde{\Lambda}_{ijk} - a_{ij}b_k - a_{jk}b_i - a_{ki}b_j\,,$$

nous pourrons écrire l'équation (36) brièvement comme

$$b_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k = 0\,. \tag{37}$$

En raison des résultats des travaux [1], [2], et [4], le cône cubique (37) est un cône de tangentes de Darboux. La signification géométrique des tangentes de Darboux d'une homographie $\boldsymbol{H}$ tangente à la transformation $\boldsymbol{T}$ a été rendue ainsi suffisamment claire.

3. Revenons maintenant aux formes quadratique et cubique

$$F_2 = a_{ij}\omega^i\omega^j , \tag{38}$$

$$F_3 = b_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k . \tag{39}$$

Posons ensuite

$$\Phi = F_3/F_2 . \tag{40}$$

Nous allons montrer que la forme Φ est invariante. Comme il résulte directement de la définition de la différentielle extérieure et de celle du produit extérieur des formes de Pfaff, on a

$$\delta(\omega^i\omega^j) = 2e_0^0\omega^i\omega^j - \omega^r(e_r^i\omega^j + e_r^j\omega^i) .$$

Il décule de l'équation (12) que $\delta a_{ij} = a_{ik}e_j^k + a_{jk}e_i^k - a_{ij}(e_0^0 + e_{n+1}^{n+1})$, de sorte que l'on a

$$\delta F_2 = F_2(e_0^0 - e_{n+1}^{n+1}) . \tag{41}$$

Ensuite on a

$$\delta(\omega^i\omega^j\omega^k) = 3e_0^0\omega^i\omega^j\omega^k - \omega^r(e_r^i\omega^j\omega^k + e_r^j\omega^i\omega^k + e_r^k\omega^j\omega^i) ;$$

il résulte alors des équations (13)

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\Lambda}_{ijk} = {} & \tilde{\Lambda}_{rji}e_k^r + \tilde{\Lambda}_{irk}e_j^r + \tilde{\Lambda}_{rjk}e_i^r - \tilde{\Lambda}_{ijk}(2e_0^0 + e_{n+1}^{n+1}) - \\ & - (a_{ij}e_k^0 + a_{ik}e_j^0 + a_{kj}e_i^0) + \tfrac{2}{3}(a_{ij}a_{rk} + a_{ik}a_{rj} + a_{jk}a_{ir})\, e_{n+1}^r + \\ & + \tfrac{1}{3}(a_{ij}\Lambda_{rk} + a_{ik}\Lambda_{rj} + a_{jk}\Lambda_{ri})\, e_{n+1}^r ,\end{aligned}$$

et des équations (15)

$$\delta a^{rs} = - a^{rk}e_k^s - e^{ks}e_k^r + a^{rs}(e_0^0 + e_{n+1}^{n+1}) .$$

Le calcul conduit au résultat

$$\delta F_3 = F_3(e_0^0 - e_{n+1}^{n+1}) . \tag{42}$$

Alors, il résulte déjà facilement des équations (41) et (42) que l'on a $\delta\Phi = 0$. On a donc le

Théorème 3. *La forme Φ est invariante et détermine l'élément projectif linéaire de l'hypersurface π dans l'espace $(n + 1)$-dimensionnel à connextion projective.*

Dans le cas d'une hypersurface dans l'espace projectif, la forme Φ se réduit à l'élément projectif linéaire de Fubini.

4. À présent, nous allons déterminer l'élément projectif linéaire de la dualisation π^*. L'homographie générale $\boldsymbol{K}$ de la transformation asymptotique $\boldsymbol{T}$ entre π^* et l'hypersurface π est donnée par les équations

$$\boldsymbol{K}E^L = \beta^{LM}A_M . \tag{43}$$

Pour que l'homographie $\boldsymbol{K}$ soit homographie tangente, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}E^{n+1} &= A , \\ \boldsymbol{K}\, \mathrm{d}E^{n+1} &= \mathrm{d}A + \psi A .\end{aligned} \tag{44}$$

Une homographie **K** tangente est donc donnée par les équations

$$
\begin{aligned}
(45)\qquad \boldsymbol{K}E^{n+1} &= A\,, \\
\boldsymbol{K}E^{i} &= \beta^{i,0}A - A^{ji}A_j\,, \\
\boldsymbol{K}E^{0} &= \beta^{0,0}A + \alpha^{0,j}A_j + \alpha^{0,n+1}A_{n+1}\,.
\end{aligned}
$$

Nous déterminons maintenant les coefficients φ^i et φ^{n+1} de telle manière que l'équation

$$(46)\qquad \boldsymbol{K}\,\mathrm{d}^2E^{n+1} = \mathrm{d}^2A + 2\psi A + (.)A + \varphi^i A_i + \varphi^{n+1}A_{n+1}$$

soit identiquement vérifiée; il en résulte

$$
\begin{aligned}
(47)\qquad \varphi^{n+1} &= (\beta^{0,n+1} - 1)\, a_{ij}\omega^i\omega^j\,, \\
\varphi^r &= A^{ri}A_{ijk}\omega^j\omega^k + a_{ij}\beta^{0,r}\omega^i\omega^j + 2A_{ik}\beta^{i,0}\omega^r\omega^k\,.
\end{aligned}
$$

Dans ce qui suit, nous nous bornerons aux homographies tangentes pour lesquelles $\varphi^{n+1} = 0$. Ont une signification géométrique les tangentes de la dualisation π^* qui contiennent les droites **K**-linéarisantes correspondantes. La condition nécessaire et suffisante en est

$$(48)\qquad \varphi^r\omega_r^{n+1} = 0\,,$$

soit aussi

$$(49)\qquad \varphi^r A_{rs}\omega^s = 0\,,$$

d'où il résulte, en vertu de (47),

$$(50)\qquad \left(A_{ls}A^{li}A_{irk} + a_{rk}A_{ls}\beta^{0,l} + 2A_{ik}A_{rs}\beta^{i,0}\right)\omega^r\omega^k\omega^s = 0\,.$$

Posons

$$A_{ls}A^{li} = A_s^i\,,\quad A^*_{ksr} = A^i_{(k}A_{|i|sr)}\,,\quad \eta^k = \beta^{0,k} + 2\beta^{k,0}\,,\quad \beta^*_{rks} = \eta^l a_{(rk}A_{|l|s)}$$

et additionnons, la somme étant étendue à toutes les permutations des indices fixes r, k, s; en raison de la notation introduite nous pourrons alors écrire

$$(51)\qquad (A^*_{ksr} + \beta^*_{ksr})\,\omega^k\omega^s\omega^r = 0\,,$$

ou bien plus brièvement

$$(52)\qquad c_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k = 0\,.$$

Nous déterminons maintenant l'homographie tangente **K** de telle façon que le cône asymptotiques $a_{ij}\omega^i\omega^j = 0$ soit apolaire par rapport au cône cubique (52). Il faut alors le système d'équations

$$(53)\qquad a^{ij}c_{ijk} = 0\,,$$

soit aussi

$$(54)\qquad a^{ij}A^*_{ijk} + \frac{n+2}{3}A_{lk}\eta^l = 0$$

soit vérifié. Du systéme (54), il découle alors facilement

$$\eta^r = -\frac{3}{n+2} a^{ij} \Lambda^{kr} \Lambda^*_{ijk} \tag{55}$$

Le cône des tangentes de Darboux de la dualisation π^* est donc déterminé par l'equation

$$\{(n+2)\Lambda^*_{ksr} - b^*_k a_{sr} - b^*_s a_{rk} - b^*_r a_{ks}\} \omega^k \omega^s \omega^r = 0 \tag{56}$$

où $b^*_k = a^{ij} \Lambda^*_{ijk}$.

Si nous posons encore $b^*_{ijk} = (n+2)\Lambda^*_{ijk} - b^*_i a_{jk} - b^*_j a_{ki} - b^*_k a_{ji}$, nous pouvons écrire l'équation (56) d'une façon sommaire sous la forme

$$b^*_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k = 0\,. \tag{57}$$

Dans le cas d'un espace projectif les fonctions Λ_{ik} et Λ^{ik} sont composantes de tenseurs symétriques de façon que l'on a $\Lambda_{ls}\Lambda^{li} = \Lambda^i_s = \delta^i_s$. Mais alors, on a évidemment

$$\Lambda^*_{ijk} = \tilde{\Lambda}_{ijk}\,, \quad b^*_{ijk} = b_{ijk}\,.$$

Théorème 4. *Dans une espace projectif les cônes de tangentes de Darboux d'une hypersurface π et de sa dualisation π^* coïncident.*

L'élément projectif linéaire Φ^* de la dualisation π^* est déterminé (d'une manière analogue à ce qui précède) comme le quotient de la forme cubique $F^*_3 = b^*_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k$ par la forme quadratique F, donc

$$\Phi^* = F^*_3 / F_2\,. \tag{58}$$

Pour montrer que Φ^* est invariant, il faut démontrer que $\delta\Phi^* = 0$.

Or, on a tout d'abord

$$\begin{aligned} \delta\Lambda^*_{ksr} = e^l_k \Lambda^*_{lsr} + e^l_s \Lambda^*_{lkr} + e^l_r \Lambda^*_{lks} - (2e^0_0 + e^{n+1}_{n+1})\Lambda^*_{ksr} - \\ - \tfrac{2}{3}(e^0_k a_{sr} + e^0_s a_{rk} + e^0_r a_{ks}) . - \tfrac{1}{3} e^0_i (\Lambda^i_k a_{rs} + \Lambda^i_r a_{sk} + \Lambda^i_s a_{kr}) + \\ + \tfrac{4}{3} e^l_{n+1} \{a_{ks}\Lambda_{lr} + a_{rs}\Lambda_{lk} + a_{kr}\Lambda_{ls}\}\,, \end{aligned} \tag{59}$$

et

$$\delta F^*_3 = (e^0_0 - e^{n+1}_{n+1}) F_3\,, \tag{60}$$

d'où il est déjà possible de déduire le résultat désiré. Nous avons donc le

Théorème 5. *La forme invariante Φ^* est l'élément projectif linéaire de la dualisation π^*. Dans un espace projectif Φ^* et Φ coïncident.*

Littérature

[1] *Alois Švec:* L'élément linéaire projectif d'une surface plongée dans l'espace à connexion projective. Чехословацкий математический журнал, 1958, т. *8* (*83*), 285—291.

[2] *Alois Švec:* Darbouxovy křivky nadplochy. Časopis pro pěstování matematiky, *84* (1959), 162—163.

[3] *Г. Ф. Лаптев:* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Моск. Мат. Общ., том *2*, 1953, 275—382.

[4] *Г. Ф. Лаптев:* Гиперповерхность в пространстве проективной связности. Доклады АН СССР, 1958, том *121*, № 1, 41—44.

[5] *E. Cartan:* Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, Paris 1937.

[6] *Fubini-Čech:* Géométrie projective différentielle des surfaces. Paris 1931.

[7] *Alois Švec:* L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle. Чех. мат. ж., 1960, *10* (*85*), 523—550.

Резюме

ПРОЕКТИВНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

ЙОСЕФ ХАВЕЛКА (Josef Havelka), Брно

Пусть π — гиперповерхность в $(n + 1)$-мерном пространстве S_{n+1} с проективной связностью, а π^* — ее дуализация. Пусть $\boldsymbol{T}$ — асимптотическое преобразование между π и π^*. Тогда существует ∞^{2n+1} касательных коллинеаций $\boldsymbol{H}$ преобразования $\boldsymbol{T}$, для которых $\boldsymbol{H}$-линеаризирующие прямые касательных гиперповерхности π являются касательными дуализации π^*. Касательные к гиперповерхности π, которые лежат в своих $\boldsymbol{H}$-линеаризующих прямых, образуют в каждой точке кубический конус. Существует ∞^{n+1} касательных коллинеаций $\boldsymbol{H}$, в которых этот кубический конус аполярен конусу асимптотическому и поэтому совпадает с конусом касательных Дарбу.

В следующей части найдены проективные линейные элементы гиперповерхности π и ее дуализации π^*, и доказывается, что в проективном пространстве оба эти проективные линейные элементы совпадают.