Czechoslovak Mathematical Journal

Stanisław Gołąb

Sur l'équivalence des objets géométriques de deuxième classe dont le nombre de composantes est égal à la dimension de l'espace

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 3, 475–479

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100474

SUR L'ÉQUIVALENCE DES OBJETS GÉOMÉTRIQUES DE DEUXIÈME CLASSE DONT LE NOMBRE DE COMPOSANTES EST ÉGAL A LA DIMENSION DE L'ESPACE

STANISLAW GOŁĄB, Kraków

(Reçu le 21 juin 1960)

Dans cet article, on cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence de certains objets géométriques spéciaux de seconde classe, dont le nombre de composantes est égal à la dimension de l'espace.

Parmi les objets géométriques de première classe dont le nombre de composantes est égal à la dimension de l'espace les plus simples sont les vecteurs contrevariants et covariants ainsi que les densités vectorielles. Si $\mathbf{v}$ avec les composantes v^ν représente un vecteur contrevariant et si nous prenons n^2 scalaires ϱ^ν_λ jouissant de la propriété

$$\det \varrho^\nu_\lambda \neq 0 \,, \tag{1}$$

et si nous posons

$$v^{*\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} \varrho^\nu_\lambda v^\lambda \,, \tag{2}$$

nous obtenons ainsi un nouvel objet géométrique possédant n composantes. Il est facile de prouver que cet objet est équivalent[1]) au vecteur $\mathbf{v}$ bien que la règle de transformation des composantes soit en général différente de celle du vecteur $\mathbf{v}$.[2])

Parmi les objets géométriques de deuxième classe[3]) nous connaissons aussi des objets dont le nombre de composantes est égal à la dimension de l'espace. De la manière la plus simple on obtient un tel objet de l'objet d'une connexion linéaire $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ en faisant la contraction des indices ν et λ. En posant

$$\Gamma_\mu \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma^\nu_{\nu\mu} \,, \tag{3}$$

---

[1]) On peut trouver la définition de la notion d'équivalence de deux objets géométriques dans le travail J. ACZÉL-S. GOLAB, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*. Monografie Matematyczne T. *39*, Warszawa 1960, p. 16.

[2]) Ce théorème est contenu dans le travail de M. A. JAKUBOWICZ, *O pewnych obiektach geometrycznych równoważnych afinorom*. Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej, Budownictwo 2, 1960.

[3]) Les objets de deuxième classe sont (d'après la terminologie de MM. J. HAANTJES et J. A. SCHOUTEN) ceux pour lesquels la règle de transformation des composantes contient les dérivées premières et secondes de la transformation des coordonnées.

nous obtenons un objet géométrique à n composantes (n signifie ici la dimension de l'espace dans lequel on envisage les objets géométriques) ayant la règle de transformation

$$(4) \qquad \Gamma_{\nu'} = A^{\nu}_{\nu'}\Gamma_{\nu} - \partial_{\nu'} \log J\,,[4])$$

où nous admettons les notations suivantes

$$(5) \qquad A^{\nu}_{\nu'} = \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial \xi^{\nu'}}\,, \quad A^{\nu'}_{\nu} = \frac{\partial \xi^{\nu'}}{\partial \xi^{\nu}}\,, \quad A^{\lambda}_{\mu'\nu'} = \frac{\partial^2 \xi^{\lambda}}{\partial \xi^{\mu'}\,\partial \xi^{\nu'}}\,,$$

$$J = \det A^{\nu'}_{\nu}\,, \quad \partial_{\nu'} = \frac{\partial}{\partial \xi^{\nu'}}\,.$$

Hors des objets obéissant à la règle (4) nous avons les objets plus généraux notamment

$$(6) \qquad \Lambda_{\nu'} = A^{\nu}_{\nu'}\Lambda_{\nu} + q\partial_{\nu'} \log J\,,$$

où q dénote un scalaire arbitraire différent de zéro (pour $q = 0$, (6) représente un vecteur covariant, donc un objet de première classe).

Il se pose le problème suivant: Soient donnés deux objets, l'un Λ_{ν} avec la règle de transformation (6) et l'autre Λ^*_{ν} avec la règle de transformation

$$(7) \qquad \Lambda^*_{\nu'} = A^{\nu}_{\nu'}\Lambda^*_{\nu} + p\partial_{\nu'} \log J\,,$$

où p désigne une constante différente de zéro. Comme les objets Λ et Λ^* possèdent le même nombre n de composantes, ils peuvent être équivalents. Quand aura lieu cette circonstance?

Nous trouverons tout d'abord la condition nécessaire. Pour ce but supposons que Λ et Λ^* soient équivalents. D'après la définition de l'équivalence nous pouvons conclure qu'il existe un système de fonctions

$$(8) \qquad f_{\nu}(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

représentant une transformation inversible d'une façon globale et tel que la relation

$$(9) \qquad \Lambda^*_{\nu} = f_{\nu}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)\,, \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

est remplie dans chaque système admissible de coordonnées ξ^{ν}. Donc la relation

$$(10) \qquad \Lambda^*_{\nu'} = \delta^{\lambda}_{\nu'} f_{\lambda}(\Lambda_{1'}, \ldots, \Lambda_{n'})\,, \quad \delta^{\lambda}_{\nu'} = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \nu' = \lambda \\ 0 & \text{pour} \quad \nu' \neq \lambda \end{cases}$$

doit être en même temps satisfaite. En vertu des formules (6) et (7) nous obtenons

$$A^{\nu}_{\nu'}\Lambda^*_{\nu} + p\partial_{\nu'} \log J = \delta^{\lambda}_{\nu'} f_{\lambda}\,\{A^{\nu}_{1'}\Lambda_{\nu} + q\partial_{1'} \log J, \ldots, A^{\nu}_{n'}\Lambda_{\nu} + q\partial_{n'} \log J\}\,.$$

En prenant (9) en considération et en substituant x_{ν} au lieu de Λ_{ν}, nous parvenons au suivant système d'équations fonctionnelles

$$(11) \qquad A^{\nu}_{\nu'} f_{\nu}(x_1, \ldots, x_n) + p\partial_{\nu'} \log J =$$
$$= \delta^{\lambda}_{\nu'} f_{\lambda}\,\{A^{\nu}_{1'}x_{\nu} + q\partial_{1'} \log J, \ldots, A^{\nu}_{n'}x_{\nu} + q\partial_{n'} \log J\}\,, \quad (\nu' = 1', \ldots, n')\,.$$

[4]) Nous écrivons brièvement $\log J$ au lieu de $\log |J|$.

Dans ce système les $x_1, \ldots, x_n$ sont traités comme fixés pendant que les

$$A^{\nu}_{\nu'},\ A^{\nu}_{\lambda'\mu'} \tag{12}$$

sont considérés comme variables independantes. Ces variables sont assujetties aux conditions suivantes

$$\det A^{\nu}_{\nu'} = J^{-1} \neq 0\,, \tag{13}$$

$$A^{\nu}_{\lambda'\mu'} = A^{\nu}_{\mu'\lambda'}\,. \tag{14}$$

Remarquons que dans le second membre de chaque équation (11) il figure seulement une fonction f_ν inconnue pendant que dans le premier membre apparaissent toutes les fonctions inconnues f_λ. P. ex. la première équation prend la forme

$$\begin{aligned} &A^1_{1'} f_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + A^n_{1'} f_n(x_1, \ldots, x_n) + p\partial_{1'} \log J = \\ &= f_1 \{A^1_{1'} x_1 + \ldots + A^n_{1'} x_n + q\partial_{1'} \log J, \ldots, A^1_{n'} x_1 + \ldots + A^n_{n'} x_n + \partial_{n'} \log J\}\,. \end{aligned}$$

Posons dans le système (11)

$$A^{\lambda}_{\nu'} = \delta^{\lambda}_{\nu'}\,. \tag{15}$$

Alors nous obtenons

$$\begin{gathered} f_\nu(x_1, \ldots, x_n) + p\partial_{\nu'} \log J = f_\nu \{x_1 + q\partial_{1'} \log J, \ldots, x_n + q\partial_{n'} \log J\} \\ (\nu = 1, \ldots, n)\,. \end{gathered} \tag{16}$$

Remarquons que l'on a

$$\partial_{\nu'} \log J = -A^{\lambda'}_{\mu} \,.\, A^{\mu}_{\lambda'\nu'}$$

et, comme, vu l'hypothèse (15), on a

$$A^{\lambda'}_{\mu} = \delta^{\lambda'}_{\mu}\,,$$

donc

$$\partial_{\nu'} \log J = -A^{\lambda}_{\lambda'\nu'} = -\sum_{\lambda=1}^{n} A^{\lambda}_{\lambda'\nu'}\,.$$

En vertu de l'indépendance des paramètres $A^{\lambda}_{\lambda'\mu'}$ (dont le nombre total est égal à $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ on peut traiter les $\partial_{\nu'} \log J$ comme variables indépendantes.[5]) Posons

$$y_\nu \overset{\mathrm{df}}{=} -\sum_{\lambda} A^{\lambda}_{\lambda'\nu'}\,.$$

Le système (16) prendra alors (d'après la transposition des membres) la forme

$$f_\nu\{x_1 + qy_1, \ldots, x_n + qy_n\} = f_\nu(x_1, \ldots, x_n) + py_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n)\,.$$

Maintenant, chaque équation contient déjà une fonction inconnue. En posant

$$z_\nu = qy_\nu$$

[5]) Les $x_1, \ldots, x_n$ étant envisagés comme fixes, on peut choisir la transformation $(\lambda) \to (\lambda')$ de telle manière, qu' au point $(x_1, \ldots, x_n)$ l'équation (15) soit remplie, sans que les $A^{\lambda}_{\lambda'\nu'}$ soient identiquement nuls.

nous pouvons, en tenant compte de l'hypothèse $q \neq 0$, écrire le système précédent comme suit

$$f_\nu(x_1 + z_1, \ldots, x_n + z_n) = \frac{p}{q} z_\nu + f_\nu(x_1, \ldots, x_n) \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

En posant ensuite

$$t_\lambda = z_\lambda + x_\lambda \quad (\lambda = 1, \ldots, n),$$

nous obtenons finalement

$$f_\nu(t_1, \ldots, t_n) = \frac{p}{q} t_\nu - \frac{p}{q} x_\nu + f_\nu(x_1, \ldots, x_n),$$

ou bien

$$f_\nu(t_1, \ldots, t_n) = \frac{p}{q} t_\nu + a_\nu, \tag{17}$$

où les a_ν sont constantes

$$a_\nu \stackrel{\mathrm{df}}{=} f_\nu(x_1, \ldots, x_n) - \frac{p}{q} x_\nu.$$

On voit de la formule (17), en égard à l'arbitraire de t_λ (cet arbitraire découle de l'arbitraire des z_λ et ce dernier de l'arbitraire des y_λ) que la fonction $f_\nu(t_1, \ldots, t_n)$ dépend seulement de la variable t_ν et qu'elle est une fonction linéaire. En substituant (17) dans (11) nous obtenons

$$A^\nu_{\nu'} \left(\frac{p}{q} x_\nu + a_\nu\right) + p\partial_{\nu'} \log J = (A^\nu_{\nu'} x_\nu + q\partial_{\nu'} \log J) \cdot \frac{p}{q} + \delta^\nu_{\nu'} a_\nu,$$

d'où il suit après la réduction

$$A^\nu_{\nu'} a_\nu = \delta^\nu_{\nu'} a_\nu.$$

En égard à l'arbitraire des paramètres $A^\nu_{\nu'}$ nous concluons que l'on a

$$a_\nu = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

et nous obtenons finalement

$$f_\nu(t_1, \ldots, t_n) = \frac{p}{q} \cdot t_\nu.$$

Réciproquement on constate facilement que, étant donné un objet géométrique Λ_ν avec la règle de transformation (6), si nous posons

$$\Lambda^*_\nu \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{p}{q} \Lambda_\nu, \tag{18}$$

où q est une constante arbitraire $\neq 0$, alors nous obtenons un objet géométrique avec la règle (7), un objet équivalent à l'objet Λ_ν parce que la transformation (8) définie par le système de fonctions

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{p}{q} x_\nu$$

est inversible. Nous avons donc le

Théorème. *Deux objets géométriques* Λ_ν *et* Λ_ν^* *avec les règles de transformation* (6) *et* (7) *sont équivalents si et seulement si pour leurs composantes subsistent les relations* (18).

Du théorème précédent découle dans un cas particulier le

Corollaire. *Si deux objets géométriques* Λ_ν *et* Λ_ν^* *possèdent la même règle de transformation* (6) ($p \neq 0$), *ils sont équivalents si et seulement s'ils sont égaux.*

Резюме

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ВТОРОГО КЛАССА, ЧИСЛО СОСТАВЛЯЮШИХ КОТОРЫХ РАВНО РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА

СТАНИСЛАВ ГОЛОМБ (Stanislaw Gołąb), Краков

В статье доказывается

Теорема. *Необходимое и достаточное условие эквивалентности геометрических объектов* Λ_ν, Λ_ν^*, *преобразующихся по формулам*

$$\Lambda_{\nu'} = A_{\nu'}^{\nu}\Lambda_\nu + q\partial_{\nu'}\log|J|\,, \quad q \neq 0\,,$$

$$\Lambda_{\nu'}^* = A_{\nu'}^{\nu}\Lambda_\nu^* + p\partial_{\nu'}\log|J|\,, \quad p \neq 0\,,$$

$$\left(A_{\nu'}^{\nu} = \frac{\partial\xi^{\nu}}{\partial\xi^{\nu'}}\,, \quad A_{\nu}^{\nu'} = \frac{\partial\xi^{\nu'}}{\partial\xi^{\nu}}\,, \quad J = \det A_{\nu}^{\nu'} \neq 0\right)$$

имеет вид

$$\Lambda_\nu^* = \frac{p}{q}\,\Lambda_\nu\,.$$