

Jindřich Nečas

Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 4, 632–633

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100489>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SUR UNE MÉTHODE POUR RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE ELLIPTIQUE,
VOISINE DE LA VARIATIONNELLE

(Communication préalable)

JINDŘICH NEČAS, Praha

(Reçu le 27 septembre 1961)

Soit Ω un domaine borné avec la frontière lipschitzienne. On désigne par $\varrho(P)$ la distance du point P de Ω de la frontière du domaine considéré. Soit $\mathcal{E}(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes, indéfiniment différentiables sur Ω , continues avec toutes leurs dérivées dans la fermeture de Ω . Soit $D(\Omega)$ le sous-espace de $\mathcal{E}(\Omega)$ constitué des fonctions à support compact. On désigne par $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes qui sont avec toutes leurs dérivées (prises au sens des distributions) jusqu'à l'ordre k de $p^{-\text{ième}}$ puissance sommable avec le poids $\varrho^\alpha(P)$. On munit $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ de la norme

$$|u| = \left[\sum_{i=i_1+i_2+\dots+i_n=0}^k \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} \right|^p \varrho^\alpha d\Omega \right]^{1/p}$$

et pour $p = 2$ du produit scalaire

$$(u, v) = \sum_{i=i_1+i_2+\dots+i_n=0}^k \int_{\Omega} \frac{\partial^i u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} \frac{\partial^i \bar{v}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} \varrho^\alpha d\Omega.$$

On désigne par $\overset{\circ}{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ définie moyennant la norme mentionnée ci-dessus.

On peut maintenant démontrer différents théorèmes de la densité et de l'immersion dont les plus importants sont:

Théorème. Soit $\alpha \geq 0$. Alors $\overline{\mathcal{E}(\Omega)} = W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$. (La fermeture est définie moyennant la norme de $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$.)

Dans la démonstration de ce théorème, on suit à peu près les mêmes idées que pour $\alpha = 0$.

Théorème. Soit $\alpha < p - 1$. Alors $\overset{\circ}{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}_{p,\alpha-i}^{(k-i)}(\Omega)$ et la transformation identique de $\overset{\circ}{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ dans $\overset{\circ}{W}_{p,\alpha-i}^{(k-i)}(\Omega)$ est continue.

Для демонстрации этого теорема, опираясь на неравенство Харди.
 Пусть

$$Du = (-1)^{|i|} D^i(a_{ij}D^j u),$$

Оператор дифференциал порядка $2k$, $k \geq 1$, где i, j являются векторами $i = [i_1, i_2, \dots, i_n]$, $j = [j_1, j_2, \dots, j_n]$ с компонентами $0, 1, \dots, k$, $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_n$, $|j| = j_1 + j_2 + \dots + j_n$, $|i| \leq k$, $|j| \leq k$, $D^j u = \partial^{j_1} u / \partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2} \dots \partial x_n^{j_n}$, a_{ij} являются функциями измеримыми, ограниченными; соглашение обычно о суммировании используется. Положим

$$B(v, u) = \int_{\Omega} \bar{a}_{ij} D^i v D^j \bar{u} \, d\Omega.$$

Предполагается, что D эллиптический:

$$\varphi \in D(\Omega) \Rightarrow |B(\varphi, \varphi)| \geq C |\varphi|_{W^{(k), 2, 0}(\Omega)}^2.$$

Пусть f функционал определен на $\dot{W}_{2, -\alpha}^{(k)}$, u_0 функция из $W_{2, \alpha}^{(k)}(\Omega)$. Тогда докажем следующее

Теорема. *Существует единственное слабое решение u уравнения $Du = f$, принадлежащее к $W_{2, \alpha}^{(k)}(\Omega)$, такое что $u - u_0 \in \dot{W}_{2, \alpha}^{(k)}(\Omega)$, при условии, что $|\alpha|$ достаточно мало. Тогда*

$$\|u\|_{W^{(k), 2, \alpha}(\Omega)} \leq c [\|u_0\|_{W^{(k), 2, \alpha}(\Omega)} + |f|].$$

Для доказательства теорема, используется предыдущий теорема и обобщается теорема П. Д. Лакса, А. Милграма на билинейные формы.

Резюме

О МЕТОДЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА, БЛИЗКОГО К ВАРИАЦИОННОМУ

(Предварительное сообщение)

ИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas), Прага

Для областей с границей, удовлетворяющей условию Липшица и для эллиптических дифференциальных операторов порядка $2k$ обобщается вариационный метод.

Вместо пространств Соболева $W_2^{(k)}(\Omega)$ изучаются пространства $W_{2, \alpha}^{(k)}(\Omega)$, где $W_{2, \alpha}^{(k)}(\Omega)$ — пространство функций, у которых существуют обобщенные частные производные до порядка k и суммируемые с второй степенью и с весом $\varrho^\alpha(P)$. Здесь $\varrho(P)$ — расстояние точки от границы; α должно быть достаточно малым.