

Miloslav Jůza

Le système complet d'invariants d'un monosystème à trois dimensions dans
L'espace euclidien à cinq dimensions

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 3, 401–403

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100527>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

LE SYSTEME COMPLET D'INVARIANTS D'UN MONOSYSTEME
A TROIS DIMENSIONS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN
A CINQ DIMENSIONS

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 28 juillet 1960)

Dans cet article, on construit le système complet d'invariants d'une variété formée d'un système monoparamétrique de plans dans E_5 .

Soit donnée, dans l'espace euclidien à cinq dimensions E_5 , une variété formée d'un système monoparamétrique de plans $[A(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)]$ où $\mathbf{u}_i(t) \mathbf{u}_j(t) = \delta_{ij}$. Une telle variété sera appelée *monosystème*.¹⁾ Supposons que notre monosystème soit *non-développable*, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \quad [A', \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2] \neq 0.$$

Soit $A_4(t)$ l'espace vectoriel $[\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}'_1(t), \mathbf{u}'_2(t)]$ qui est indépendant du choix des bases $\{\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)\}$ des plans générateurs du monosystème, soit $A_2(t)$ le sous-espace à deux dimensions de l'espace $A_4(t)$, totalement orthogonal à $[\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)]$.

Si nous écrivons maintenant

$$(2) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}'_1(t_0) &= a_1 \mathbf{u}_1(t_0) + b_1 \mathbf{u}_2(t_0) + \mathbf{k}_1, & \mathbf{k}_1 &\in A_2(t_0), \\ \mathbf{u}'_2(t_0) &= a_2 \mathbf{u}_1(t_0) + b_2 \mathbf{u}_2(t_0) + \mathbf{k}_2, & \mathbf{k}_2 &\in A_2(t_0), \end{aligned}$$

les vecteurs $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ seront déterminés d'une manière univoque. Pour le vecteur

$$(3) \quad \mathbf{v}(t) = \alpha(t) \mathbf{u}_1(t) + \beta(t) \mathbf{u}_2(t)$$

nous avons alors

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}'(t_0) &= (\cdot) \mathbf{u}_1(t_0) + (\cdot) \mathbf{u}_2(t_0) + \alpha(t_0) \mathbf{k}_1 + \beta(t_0) \mathbf{k}_2 = \\ &= (\cdot) \mathbf{u}_1(t_0) + (\cdot) \mathbf{u}_2(t_0) + \mathbf{k}, & \mathbf{k} &\in A_2(t_0). \end{aligned}$$

Le vecteur \mathbf{k} , c'est-à-dire la projection du vecteur $\mathbf{v}'(t_0)$ dans l'espace $A_2(t_0)$ est donc déterminé univoquement par les nombres $\alpha(t_0), \beta(t_0)$. Pour la grandeur du vecteur \mathbf{k} on a

$$(5) \quad |\mathbf{k}| = \alpha^2(t_0) \mathbf{k}_1^2 + 2\alpha(t_0) \beta(t_0) \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 + \beta^2(t_0) \mathbf{k}_2^2.$$

¹⁾ Voir [3], [4], [5].

Nous allons nous borner maintenant aux vecteurs \mathbf{v} de longueur 1, pour lesquels on a $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Si nous écartons encore le cas où

$$(6) \quad \mathbf{k}_1^2 = \mathbf{k}_2^2, \quad \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 = 0,$$

il existe des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ tels que $|\mathbf{k}|$ pour \mathbf{v}_1 sera minimum et $|\mathbf{k}|$ pour \mathbf{v}_2 sera maximum, ces vecteurs sont déterminés au sens près et l'on a $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 = 0$. La direction du vecteur \mathbf{v}_1 sera appelée *direction minimale*, celle du vecteur \mathbf{v}_2 *direction maximale* du plan générateur $[A(t_0), \mathbf{u}_1(t_0), \mathbf{u}_2(t_0)]$.

A présent, nous choisissons un système de bases $\{A(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)\}$ du monosystème tel que $A(t)$ soit la ligne de striction,²⁾ $\mathbf{u}_1(t)$ un vecteur-unité de direction minimale et $\mathbf{u}_2(t)$ un vecteur-unité de direction maximale. Pour le repère mobile de l'espace \mathbf{E}_5 entier nous prenons $\{A(t), \mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_5(t)\}$ où $\mathbf{u}_3(t)$ est un vecteur-unité de direction de la projection du vecteur $\mathbf{u}'_1(t)$ dans l'espace $\mathbf{A}_2(t)$, $\mathbf{u}_4(t)$ un vecteur-unité de direction de la projection du vecteur $\mathbf{u}_2(t)$ dans l'espace $\mathbf{A}_2(t)$, $\mathbf{u}_5(t)$ est un vecteur-unité orthogonal à tous les vecteurs $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_4(t)$. Pour le paramètre t nous choisissons l'arc de la ligne de striction, de sorte que nous aurons $|A'(t)| = 1$. Le repère en question n'est pas encore déterminé sans ambiguïté, car nous n'avons pas choisi le sens des vecteurs $\mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_5(t)$. Néanmoins nous avons

$$(7) \quad \begin{aligned} A' &= p_1 \mathbf{u}_1 + p_2 \mathbf{u}_2 + \varepsilon(1 - p_1^2 - p_2^2)^{1/2} \mathbf{u}_5, \quad \varepsilon = \pm 1, \\ \mathbf{u}'_1 &= q \mathbf{u}_2 + c_1 \mathbf{u}_3, \\ \mathbf{u}'_2 &= -q \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_4, \\ \mathbf{u}'_3 &= -c_1 \mathbf{u}_1 + r \mathbf{u}_4 + s_1 \mathbf{u}_5, \\ \mathbf{u}'_4 &= -c_2 \mathbf{u}_2 - r \mathbf{u}_3 + s_2 \mathbf{u}_5, \\ \mathbf{u}'_5 &= -s_1 \mathbf{u}_3 - s_2 \mathbf{u}_4. \end{aligned}$$

Si nous nous bornons maintenant au cas où $p_1 \neq 0, p_2 \neq 0$, nous pouvons orienter les vecteurs $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_5$ de telle façon que nous ayons

$$(8) \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0, \quad \varepsilon = 1, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0.$$

L'orientation du repère sera alors déterminée sans ambiguïté si l'on se donne le sens dans lequel le paramètre t parcourt la ligne de striction; les fonctions

$$(9) \quad p_1, p_2, q, c_1, c_2, r, s_1, s_2$$

seront alors les invariants du monosystème. Remarquons encore que dans nos hypothèses nous avons toujours

$$(10) \quad p_1 < 1, \quad p_2 < 1, \quad c_1 < c_2.$$

Par contre, il est évident que, étant donné les fonctions (9) vérifiant (8) et (10), le monosystème vérifiant (1) et (6) est par là déterminé à l'aide des équations (7); il est unique à des transformations euclidiennes près.

²⁾ Voir [4].

Littérature

- [1] E. Čech: Une méthode nouvelle dans la géométrie projective des surfaces réglées. Čas. pro pěst. mat. a fys., 53 (1924), 31—37 (en tchèque avec un résumé français).
- [2] J. Favard: Cours de géométrie différentielle locale. Paris 1957.
- [3] M. Jůza: Sur les variétés représentant une généralisation des surfaces réglées. Чех. мат. журн. 10 (85), 1960, 440—456.
- [4] M. Jůza: Ligne de striction sur une généralisation a plusieurs dimensions d'une surface réglée. Чех. мат. журн. 12 (87), 1962, 243—250.
- [5] C. Segre: Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi. Rend. circ. Mat. Palermo, 30 (1910), 87—121.

Резюме

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ МОНОСИСТЕМЫ РАЗМЕРНОСТИ 3 В ПЯТИМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

МИЛОСЛАВ ЮЗА (Miloslav Jůza), Прага

В пятимерном евклидовом пространстве E_5 возьмем многообразие, образованное однопараметрической системой плоскостей $[A(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)]$, $\mathbf{u}_i(t) \mathbf{u}_j(t) = \delta_{ij}$, которое мы будем называть *моносистемой*. Тогда при надлежащем выборе базисов $\{A(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t)\}$ образующих плоскостей можно, в общем случае, выбрать в пространстве E_5 подвижной репер $\{A(t), \mathbf{u}_1(t), \dots, \mathbf{u}_5(t)\}$ так, чтобы имели место соотношения (7), (8) и (10). Система функций (9) будет тогда полной системой инвариантов моносистемы.