Václav Alda

Bemerkung zur Arbeit „Mathematische Theorie der Torsions- und Biegungsschwingungen anisotroper Stäbe“ von A. Apfelbeck

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 4, 622–626

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100545

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

BEMERKUNG ZUR ARBEIT „MATHEMATISCHE THEORIE DER TORSIONS- UND BIEGUNGSSCHWINGUNGEN ANISOTROPER STÄBE“ VON A. APFELBECK

VÁCLAV ALDA, Liberec

(Eingelangt am 5. Dezember 1960)

In der Arbeit sind kürzere Beweise der Sätze von [1] angegeben; die Verkürzung wird durch die Anwendung des Satzes über das Spektrum eines symmetrischen kompakten Operators erreicht.

1. A. APFELBECK löst in seiner Arbeit [1] folgende Aufgabe: man soll die Funktionen u, n bestimmen, welche das System

$$\tag{1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = \gamma \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + \delta \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

und die Randbedingungen

$$\tag{2} \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \beta \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm 1, \quad t \geqq 0.$$

erfüllen. Dabei $\alpha, \ldots, \delta$ sind die Materialkonstanten, welche den Ungleichungen

$$\tag{3} \alpha < 0, \ \beta\gamma < 0, \ \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma < 0 \quad (\text{woraus } \delta > 0 \text{ folgt})$$

genügen. Ausserdem sind für die Lösung die Anfangsbedingungen

$$\tag{4} u(x, 0) = \varphi(x), \quad n(x, 0) = \mu(x), \qquad u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad n'_t(x, 0) = \nu(x).$$

vorgeschrieben.

Durch die Separation der Veränderlichen $u = U(x) . T_1(t)$, $n = N(x) . T_2(t)$ kann das System (1) zur Form

$$\tag{5} \alpha U^{(4)} + \beta N''' = -\lambda U, \quad \gamma U''' + \delta N'' = -\lambda N$$

mit den Randbedingungen

$$\tag{6} \alpha U'''(\pm 1) + \beta N''(\pm 1) = 0, \quad U''(\pm 1) = N'(\pm 1) = 0.$$

gebracht werden. Durch Elimination einer der Unbekannten hatte Apfelbeck eine Gleichung sechster Ordnung erhalten, in welcher ausser λ noch λ^2 auftritt, wass die durch die Greensche Funktion verwirklichte Untersuchung kompliziert.

Es wird gezeigt, wie man die ganze Untersuchung mit Hilfe der gut bekannten Theorie der symmetrischen kompakten Operatoren im Hilbertschen Raume verkürzen kann. Dabei ist die Untersuchung grösstenteils in [1] durchgeführt; die Vereinfachung erscheint als Resultat der expliziten Anwendung des Hilbertschen Raumes.

Für Bestimmtheit sei vorausgesetzt, dass $\gamma > 0$, $\beta < 0$ ist. Für die Paare (U, N) der Funktionen aus $L^2\langle -1, 1\rangle$ sei das Skalarprodukt

$$((U_1, N_1), (U_2, N_2)) = \int_{-1}^{1} (\gamma U_1 \bar{U}_2 - \beta N_1 \bar{N}_2)\, \mathrm{d}x \,. \tag{7}$$

eingeführt. Dadurch bekommt man den Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$. Nimmt man in diesem Raume alle Paare (U, N), für welche U die vierte, N die dritte stetige Ableitung besitzt, wobei U, N die Bedingungen (6) erfüllen, so bekommt man eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, welche in $\mathfrak{H}$ dicht ist.

Auf $\mathfrak{M}$ sei der Operator $\boldsymbol{A}$ durch die Gleichung

$$\boldsymbol{A}(U, N) = -(\alpha U^{(4)} + \beta N''', \gamma U''' + \delta N'') \tag{8}$$

definiert. Jetzt gilt

$$(\boldsymbol{A}(U_1, N_1), (U_2, N_2)) = -\int_{-1}^{1} \{\alpha\gamma U_1'' \bar{U}_2'' + \beta\gamma(N_1' \bar{U}_2'' + \bar{N}_2' U_1'') + \beta\delta N_1' \bar{N}_2'\}\, \mathrm{d}x$$

(vergl. mit [1]) für $(U_1, N_1), (U_2, N_2) \in \mathfrak{M}$, so dass $\boldsymbol{A}$ auf $\mathfrak{M}$ symmetrisch ist. Da in dem Ausdruck

$$(\boldsymbol{A}(U, N), (U, N)) = -\int_{-1}^{1} \{\alpha\gamma |U''|^2 + 2\beta\gamma \Re N' \bar{U}'' + \beta\delta |N'|^2\}\, \mathrm{d}x \tag{9}$$

die integrierte Funktion nichtpositiv ist (da $\vartheta^2\beta^2\gamma^2 - \alpha\beta\gamma\delta < 0$ für $|\vartheta| \leqq 1$ ist), so ist $\boldsymbol{A}$ auch nichtnegativ.

Aus dem Systeme $\mathfrak{M}$ transformieren sich in das zu $\mathfrak{H}$ gehörende Nullelement gerade die Paare (U, N), für welche

$$U = a_0 + a_1 x \,, \quad N = b_0 \tag{10}$$

gilt.

Da $\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist, so transformieren sich die zu $\mathfrak{H}$ gehörende Elemente, welche zu diesen Paaren orthogonal sind, in Elemente, welche ebenfalls zu diesen Paaren orthogonal sind. Der Raum der zu diesen Paaren orthogonalen Elemente sei mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet.

Der Operator $\boldsymbol{A}$ ist auf $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{K} = \mathfrak{M}_1$ schlicht, und es existiert zu ihm die inverse Transformation $\boldsymbol{B}$. Die Form von $\boldsymbol{B}$ kann leicht gefunden werden; man stellt fest, dass $\boldsymbol{B}$ ein kompakter auf $\mathfrak{K}$ definierter Operator ist. Ein Teil davon folgt aus der

Tatsache, die man leicht beweisen kann, dass $\boldsymbol{A}$ auf der Menge $\mathfrak{M}$, welche in $\mathfrak{K}$ dicht ist, einen positiv definiten Operator darstellt.

Wir werden jetzt $\boldsymbol{B}$ suchen: Es sei das Paar $(f, g) \in \mathfrak{K}$ gegeben; man soll die Funktionen U, N derart finden, dass

(11) $$\alpha U^{(4)} + \beta N''' = f\,,$$

(12) $$\gamma U''' + \delta N'' = g\,,$$

gilt, wobei U, N die Randbedingungen (6) erfüllen und

(13) $$(U, N) \in \mathfrak{M}_1$$

gilt. Zuerst sei vorausgesetzt, dass g absolut stetig ist. Anstatt (12) sei die Gleichung

(12′) $$\gamma U^{(4)} + \delta N''' = g'$$

und die Bedingung

(12″) $$\gamma U'''(-1) + \delta N''(-1) = g(-1)$$

in Betracht genommen. Aus (11) und (12′) folgt

(14) $$U^{(4)} = Af + Bg'\,, \quad N''' = Cf + Dg'\,,$$

wo

(15) $$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Durch das Integrieren von (14) folgt

$$U''' = A\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + Bg(x) + k_3\,, \quad N'' = C\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + Dg(x) + l_2\,.$$

Laut (12″) und (6) ergibt sich

$$\gamma(Bg(-1) + k_3) + \delta(Dg(-1) + l_2) = g(-1)\,,$$
$$\alpha(Bg(-1) + k_3) + \beta(Dg(-1) + l_2) = 0\,,$$
$$\alpha\left(\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + Bg(1) + k_3\right) + \beta\left(C\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + Dg(1) + l_2\right) = 0\,.$$

Die erste dieser Gleichungen lautet $\gamma k_3 + \delta l_2 = 0$, die zweite $\alpha k_3 + \beta l_2 = 0$, die dritte $\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (alles nach (15)).

Hieraus folgt

$$k_3 = l_2 = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Durch wiederholtes Integrieren und weitere Umformungen ergibt sich schliesslich

(16) $$U = A\int_{-1}^{x} \frac{(x-t)^3}{3!} f(t)\,\mathrm{d}t + B\int_{-1}^{x} \frac{(x-t)^2}{2!}\,g(t)\,\mathrm{d}t + k_0 + k_1 x\,,$$

$$N = C\int_{-1}^{x} \frac{(x-t)^2}{2!} f(t)\,\mathrm{d}t + D\int_{-1}^{x} \frac{x-t}{1!}\,g(t)\,\mathrm{d}t + l_0\,,$$

wo k_0, k_1, l_0 so ausgewählte lineare Funktionale sind, dass (13) gilt. Durch Ausrechnung ergibt sich, dass f, g die Gleichungen

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

erfüllen müssen, was die Bedingung $(f, g) \in \mathfrak{K}$ darstellt. (f, g) braucht keinen anderen Bedingungen unterworfen werden, und (16) definiert den Operator $\boldsymbol{B}$ auf der ganzen Menge $\mathfrak{K}$, wobei $A\mathfrak{M}_1$ in $\mathfrak{K}$ dicht ist.

Ferner folgt, dass $\boldsymbol{B}$ einen symmetrischen, und laut (16) einen kompakten Operator in $\mathfrak{K}$ darstellt.

2. Die Gleichung (5) lautet

$$\boldsymbol{A}x = \lambda x\,,$$

wo $\boldsymbol{A}$ eine lineare Transformation in den Raum $\mathfrak{H}$ ist, welche ursprünglich auf der linearen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$, die in $\mathfrak{H}$ dicht ist, definiert wurde. A ist dabei symmetrisch und nichtnegativ.

Es sei $\mathfrak{N}$ die lineare Mannigfaltigkeit aller x, die durch $\boldsymbol{A}$ in das Nullelement transformiert werden. $\mathfrak{N}$ ist in $\mathfrak{H}$ abgeschlossen (da sie eine endliche Dimension besitzt.)

Ferner wurde mit $\mathfrak{K}$ das orthogonale Komplement zu $\mathfrak{N}$ bezeichnet. Der Operator $\boldsymbol{A}$ ist auf $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{K}$ schlicht, und mit Rücksicht auf die Symmetrie folgt $A\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{K}$.

Zu $\boldsymbol{A}$ gibt es auf $\boldsymbol{A}\mathfrak{M}_1$ den inversen symmetrischen kompakten Operator $\boldsymbol{B}$, welcher auf die ganze Menge $\mathfrak{K}$ fortgesetzt werden kann. Es sei noch $\boldsymbol{B}\mathfrak{K} = \mathfrak{M}_2$ bezeichnet.

Aus dem Vorhergehenden folgt dann die Existenz und Vollständigkeit des Systems der Eigenelemente der Gleichung (5) in $\mathfrak{K}$.

Als Nachteil erscheint, dass man die Formeln für die Eigenwerte nicht in üblicher Form erhält. Um Abhilfe zu schaffen, genügt es, ein neues skalares Produkt in $\mathfrak{K}$ zu definieren, und zwar $[x, y] = (\boldsymbol{B}x, y)$.

Dieser neue Raum sei mit $\mathfrak{K}_{\boldsymbol{B}}$ bezeichnet. Der Operator $\boldsymbol{B}^{1/2}$ existiert und ist wieder kompakt. Betrachten wir die Einheitskugel K in $\mathfrak{K}_{\boldsymbol{B}}$, d.h. $K = \mathop{\mathbf{E}}_x[\|\boldsymbol{B}^{1/2}x\| \leqq 1]$. Jetzt ist die Menge $\boldsymbol{B}^{1/2}K$ in $\mathfrak{H}$ beschränkt, also $\boldsymbol{B}K = \boldsymbol{B}^{1/2}(\boldsymbol{B}^{1/2}K)$ ist in $\mathfrak{H}$ kompakt, und folglich auch in $\mathfrak{K}_{\boldsymbol{B}}$. Deshalb ist $\boldsymbol{B}$ kompakt in $\mathfrak{K}_{\boldsymbol{B}}$. Die Symmetrie des Operators $\boldsymbol{B}$ in $\mathfrak{K}_{\boldsymbol{B}}$ bleibt in Geltung.

Es gibt deshalb eine Eigenwertenfolge $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots \geqq 0$, wobei

$$\mu_1 = \sup_{x \in \mathfrak{K}} \frac{[\boldsymbol{B}x, x]}{[x, x]} = \sup \frac{(\boldsymbol{B}x, \boldsymbol{B}x)}{(x, \boldsymbol{B}x)}$$

ist. Setzt man $x = \boldsymbol{A}y$, $y \in \mathfrak{M}_2$, so bekommt man

$$\mu_1 = \sup \frac{(y, y)}{(\boldsymbol{A}y, y)}\,, \quad y \in \mathfrak{M}_2\,,$$

so dass

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = \inf \frac{(Ay, y)}{(y, y)}$$

gilt. Es genügt, sich auf $y \in \mathfrak{M}_1$ einzuschränken.

Die Bedingung $y \in \mathfrak{M}_1$ bedeutet, dass y orthogonal zu $\mathfrak{N}$ ist, also zu den Eigenelementen, welche $\lambda_0 = 0$ entsprechen. Weitere Eigenwerte kann man durch den Rayleighschen Quotient bekommen. Dabei kann man die Bedingung $(y, \boldsymbol{B}y_i) = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, wo y_i die Eigenelemente sind, durch die Bedingung $(y, y_i) = 0$, ersetzen, so dass man die Formel (8,5) aus [1] erhält.

Aus der Theorie der symmetrischen kompakten Operatoren folgt gleichzeitig auch die Vollständigkeit des Systems der Eigenelemente.

Literatur

[1] *A. Apfelbeck:* Mathematische Theorie der Torsions- und Biegungsschwingungen anisotroper Stäbe. Чех. мат. журнал 7 (1957), 374—412.

Резюме

ЗАМЕТКА К РАБОТЕ А. АПФЕЛЬБЕКА „MATHEMATISCHE THEORIE DER TORSIONS- UND BIEGUNGSSCHWINGUNGEN ANISOTROPER STÄBE“

ВАЦЛАВ АЛДА (Václav Alda), Либерец

В заметке дается краткое доказательство теорем из работы А. Апфельбека [1]. Используется теорема об вполне непрерывных операторах в пространстве гильберта.