

Fouad M. Ragab

Reihen für Mac-Robertsche und Whittakersche Funktionen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 2, 284–289

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100567>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

REIHEN FÜR MAC-ROBERTSCHE UND WHITTAKERSCHE FUNKTIONEN

F. M. RAGAB, Cairo (U.A.R.)

(Eingegangen am 8. April 1961)

In der Arbeit werden einige Formeln aus der Theorie der Mac-Robertschen E -Funktionen und Whittakerschen Funktionen $W_{k,m}(z)$ abgeleitet. Das Hauptergebnis ist in der Formel (8) enthalten, aus der noch Summen (9) bis (12) von einigen Reihen abgeleitet werden.

1. VORWORT

In den Arbeiten [1], [2], [3] wurden schon einige Reihen von Produkten der Mac-Robertschen E -Funktionen angegeben. Bezüglich der Definitionen und Eigenschaften dieser E -Funktionen wird auf [4], Seite 352–358, verwiesen.

Die betreffende Funktion E ist in dieser Behandlung durch die folgende Beziehung definiert:

$$\begin{aligned}
 E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta : p; \alpha_r; z \\ \gamma; q; \varrho_s \end{matrix} \right] &= \Gamma(\beta) \left\{ \Gamma(\gamma - \alpha) \prod_{n=1}^q \Gamma(\varrho_n - \alpha_n) \right\}^{-1} \times \int_0^1 \lambda^{\alpha-1} (1-\lambda)^{\gamma-\alpha-1} d\lambda \times \\
 &\times \prod_{n=1}^q \int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n-1} (1-\lambda_n)^{\varrho_n-\alpha_n-1} d\lambda_n \prod_{n=q+1}^p \int_0^\infty e^{-\lambda_n} \lambda_n^{\alpha_n-1} d\lambda_n \times \\
 &\times \int_0^\infty e^{-\lambda-1} \lambda^{\alpha-1} [1 + \lambda\lambda_1 \dots \lambda_p/z]^{-\beta} d\lambda.
 \end{aligned}$$

(Bemerkung der Redaktion.)

Weitere Reihen von diesem Typ befinden sich in § 3 der vorliegenden Arbeit. Eine Hilfsformel wird in § 2 bewiesen werden. Sie ist von demselben Typ wie die in [5] und [6] angegebenen Formeln. In § 4 werden zwei Reihen für die Whittakersche Funktion $W_{k,m}(z)$ abgeleitet. Diese Funktion kann als E -Funktion mittels der Formel

$$(1) \quad E(\alpha, \beta : : z) = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) z^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-1)} e^{\frac{1}{2}z} W_{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta), \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}(z)$$

ausgedrückt werden. Für $p \leq q$ kann die E -Funktion durch

$$(2) \quad E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z) = \frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_p)}{\Gamma(\varrho_1) \dots \Gamma(\varrho_q)} {}_pF_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p, -1/z \\ \varrho_1, \dots, \varrho_q \end{matrix} \right]$$

definiert werden.

Diese Formel gilt auch, wenn $p = q + 1$, und wird im Folgenden für diesen Fall benutzt (*Bemerkung der Redaktion*).

In den Beweisen werden die folgenden Formeln benötigt:

Wenn $R(\varrho_{q+1}) > R(\alpha_{p+1}) > 0$, so gilt nach [4], S. 395:

$$(3) \quad \int_0^1 \lambda^{\alpha_{p+1}-1} (1-\lambda)^{\varrho_{q+1}-\alpha_{p+1}-1} E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z/\lambda) d\lambda = \\ = \Gamma(\varrho_{q+1} - \alpha_{p+1}) E(p+1; \alpha_r : q+1; \varrho_s : z).$$

Wenn $R(\alpha_{p+1}) > 0$, so gilt nach [4], S. 394:

$$(4) \quad \int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{\alpha_{p+1}-1} E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z/\lambda) d\lambda = E(p+1; \alpha_r : q; \varrho_s : z).$$

(Siehe [7], S. 86);

$$(5) \quad {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta; z \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} \end{matrix} \right] {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta; z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] = {}_3F_2 \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta; z \\ 2\alpha + 2\beta - 1, \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right].$$

Wenn $|\arg z| < \pi$, so gilt nach [4], S. 374:

$$(6) \quad E(p; \alpha_r : q; \varrho_s : z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\zeta) \prod_{r=1}^p \Gamma(\alpha_r - \zeta)}{\prod_{s=1}^q \Gamma(\varrho_s - \zeta)} z^\zeta d\zeta,$$

wobei das Integral längs der η -Achse genommen wird, nötigenfalls jedoch mit Schleifen, um zu erreichen, dass der Pol im Ursprung links und alle anderen Pole in den Punkten $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ rechts von dem Integrationsweg liegen. Die ganzen Zahlen ≤ 0 sind als Werte für die Parameter ausgeschlossen.

Für $p < q + 1$ ist der Integrationsweg an den Enden nach links gebogen. Für $p \geq q + 1$ gilt die Formel für $|\arg z| < \frac{1}{2}(p - q + 1)\pi$. Wegen (2) und (5) bekommt man

$$(7) \quad E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta; z \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} \end{matrix} \right] E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta; z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] = \\ = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\beta + \frac{1}{2})} E \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta; z \\ 2\alpha + 2\beta - 1, \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right].$$

2. INTEGRATION EINER E-FUNKTION NACH IHREN PARAMETERN

Es ist zu beweisen, dass

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\zeta) \Gamma(\alpha - \zeta) \Gamma(\beta - \zeta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2} - \zeta)} z^\zeta E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta, p; \alpha_r - \zeta : z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2}, q; \varrho_s - \zeta \end{matrix} : z \right] d\zeta = \\ = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\beta + \frac{1}{2})} E \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_p : z \\ 2\alpha + 2\beta - 1, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \varrho_1, \dots, \varrho_q \end{matrix} \right]$$

gilt. Hierin ist $p \geq q$, $|\arg z| < \frac{1}{2}(p - q + 2)\pi$,

$$R(\varrho_n - \alpha_n) > 0 (n = 1, 2, \dots, q), \quad R(\alpha_n) > 0 (n = q + 1, \dots, p), \quad R(\alpha) > 0.$$

Der Integrationsweg ist wie in (6) nötigenfalls mit Schleifen zu wählen, um zu sichern, dass α und β rechts von dem Integrationswege liegen.

Beweis von (8). Mit (3) und (4) erhält man, dass die linke Seite von (8) gleich

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\zeta) \Gamma(\alpha - \zeta) \Gamma(\beta - \zeta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2} - \zeta)} z^\zeta \left\{ \prod_{n=1}^q \Gamma(\varrho_n - \alpha_n) \right\}^{-1} \prod_{n=1}^q \int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n - \zeta - 1} (1 - \lambda_n)^{\varrho_n - \alpha_n - 1} d\lambda_n \cdot \\ \cdot \prod_{n=q+1}^p \int_0^\infty e^{-\lambda_n} \lambda_n^{\alpha_n - \zeta - 1} d\lambda_n E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta : z/(\lambda_1 \dots \lambda_p) \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] d\zeta$$

ist.

Hier wird die Reihenfolge der Integrationen in der Weise vertauscht, dass das erste Integral an das Ende gesetzt wird; dann erhalten wir

$$\left\{ \prod_{n=1}^q \Gamma(\varrho_n - \alpha_n) \right\}^{-1} \prod_{n=1}^q \int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n - 1} (1 - \lambda_n)^{\varrho_n - \alpha_n - 1} d\lambda_n \prod_{n=q+1}^p \int_0^\infty e^{-\lambda_n} \lambda_n^{\alpha_n - 1} d\lambda_n \cdot \\ \cdot E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta : z/(\lambda_1 \dots \lambda_p) \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\zeta) \Gamma(\alpha - \zeta) \Gamma(\beta - \zeta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2} - \zeta)} \left(\frac{z}{\lambda_1 \dots \lambda_p} \right)^\zeta d\zeta.$$

Wegen (6) lässt sich das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\zeta) \Gamma(\alpha - \zeta) \Gamma(\beta - \zeta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2} - \zeta)} \left(\frac{z}{\lambda_1 \dots \lambda_p} \right)^\zeta d\zeta$$

durch

$$E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta : z/(\lambda_1 \dots \lambda_p) \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} \end{matrix} \right]$$

ersetzen. Daher wird der zu untersuchende Ausdruck gleich

$$\left\{ \prod_{n=1}^q \Gamma(\varrho_n - \alpha_n) \right\}^{-1} \prod_{n=1}^q \int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n - 1} (1 - \lambda_n)^{\varrho_n - \alpha_n - 1} d\lambda_n \prod_{n=q+1}^p \int_0^\infty e^{-\lambda_n} \lambda_n^{\alpha_n - 1} d\lambda_n \cdot \\ \cdot E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta : z/(\lambda_1 \dots \lambda_p) \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} \end{matrix} \right] E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta : z/(\lambda_1 \dots \lambda_p) \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right].$$

Vermöge (7) erhält man daraus weiter

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\beta + \frac{1}{2})} \left\{ \prod_{n=1}^q \Gamma(\varrho_n - \alpha_n) \right\}^{-1} \prod_{n=1}^p \int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n - 1} (1 - \lambda_n)^{e_n - \alpha_n - 1} d\lambda_n \cdot \\ \cdot \prod_{n=q+1}^p \int_0^\infty e^{-\lambda_n \lambda_n^{\alpha_n - 1}} d\lambda_n E \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta + \beta : z / (\lambda_1 \dots \lambda_p) \\ 2\alpha + 2\beta - 1, \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right].$$

Durch die Anwendung von (3) und (4) ergibt sich das zu beweisende Resultat (8).

Die Einschränkungen über die q können ausser Betracht gelassen werden, weil die Integrationswege von 0 bis 1 können durch Integrationswege, welche bei 0 anfangen, die Stelle 1 umlaufen und dann nach 0 zurückkehren, ersetzt werden.

3. REIHEN VON PRODUKTEN VON E -FUNKTIONEN

Es erweist sich, dass (8) für das Summieren der folgenden Reihen verwendet werden kann:

$$(9) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{-2r}}{r! (\gamma; r)} E \left[\begin{matrix} \alpha + r, \beta + r, \gamma + r : z \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} + r \end{matrix} \right] E \left[\begin{matrix} \alpha + r, \beta + r, \gamma + r : z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} + r \end{matrix} \right] = \\ = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\beta + \frac{1}{2})} E \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta, \gamma : z \\ 2\alpha + 2\beta - 1, \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right],$$

wobei $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $R(\alpha) > 0$, $R(\gamma) > 0$.

$$(10) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{-2r}}{r! (\alpha + \beta - \frac{1}{2}; r)} E(\alpha + r, \beta + r : z) E \left[\begin{matrix} \alpha + r, \beta + r, \alpha + \beta - \frac{1}{2} + r : z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} + r \end{matrix} \right] = \\ = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\beta + \frac{1}{2})} E \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta, \alpha + \beta - \frac{1}{2} : z \\ 2\alpha + 2\beta - 1, \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right],$$

wobei $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $R(\alpha) > 0$, $R(\alpha + \beta) > \frac{1}{2}$;

$$(11) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{-2r}}{r! (\alpha + \beta + \frac{1}{2}; r)} E \left[\begin{matrix} \alpha + r, \beta + r, \alpha + \beta + \frac{1}{2} + r : z \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} + r \end{matrix} \right] E(\alpha + r, \beta + r : z) = \\ = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha + \beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\beta + \frac{1}{2})} E \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta : z \\ 2\alpha + 2\beta - 1 \end{matrix} \right],$$

wobei $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $R(\alpha) > 0$, $R(\alpha + \beta) > -\frac{1}{2}$.

Beweis von (9). Nach (6) ersetze man die E -Funktionen in der linken Seite von (9) durch Integrale, wodurch man

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{-2r}}{r! (\gamma; r)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\zeta) \Gamma(\alpha + r - \zeta) \Gamma(\beta + r - \zeta) \Gamma(\gamma + r - \zeta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2} + r - \zeta)} z^\zeta d\zeta \cdot \\ \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\xi) \Gamma(\alpha + r - \xi) \Gamma(\beta + r - \xi) \Gamma(\gamma + r - \xi)}{\Gamma(\alpha + \beta + \frac{1}{2} + r - \xi)} z^\xi d\xi$$

erhält.

Jetzt ersetze man ζ bzw. ξ durch $\zeta + r$ bzw. $\xi + r$ und vertausche die Reihenfolge der Integration und Summation. Dann erhält man

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\zeta) \Gamma(\alpha - \zeta) \Gamma(\beta - \zeta) \Gamma(\gamma - \zeta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2} - \zeta)} z^\zeta d\zeta \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\xi) \Gamma(\alpha - \xi) \Gamma(\beta - \xi) \Gamma(\gamma - \xi)}{\Gamma(\alpha + \beta + \frac{1}{2} - \xi)} z^\xi {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \zeta, \xi; 1 \\ \gamma \end{matrix} \right] d\xi.$$

Durch die Anwendung des Gausschen Satzes summiert man die ${}_2F_1$ und erhält

$$\Gamma(\gamma) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(\zeta) \Gamma(\alpha - \zeta) \Gamma(\beta - \zeta)}{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2} - \zeta)} z^\zeta E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta, \gamma - \zeta : z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right] d\zeta.$$

Das Resultat folgt jetzt aus (8) mit $p = 1$, $q = 0$. Es sei bemerkt, dass (9) für $\gamma = \alpha + \beta - \frac{1}{2}$ in (10), für $\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$ in (11) übergeht.

4. REIHEN FÜR WHITTAKERSCHE FUNKTIONEN

Wegen (1) und (10) bekommt man, dass

$$(12) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha; r) (\beta; r)}{r! (\alpha + \beta - \frac{1}{2}; r)} z^{-r} W_{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)-r, \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}(z) \cdot E \left[\begin{matrix} \alpha + r, \beta + r, \alpha + \beta - \frac{1}{2} + r : z \\ \alpha + \beta + \frac{1}{2} + r \end{matrix} \right] = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\beta + \frac{1}{2})} e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)} \cdot E \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta, \alpha + \beta - \frac{1}{2} : z \\ 2\alpha + 2\beta - 1, \alpha + \beta + \frac{1}{2} \end{matrix} \right],$$

wobei $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $R(\alpha) > 0$, $R(\alpha + \beta) > \frac{1}{2}$.

Ähnlicherweise, aus (11) und (1) folgt

$$(13) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha; r) (\beta; r)}{r! (\alpha + \beta + \frac{1}{2}; r)} z^{-r} W_{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)-r, \frac{1}{2}(\beta-\alpha)}(z) \cdot E \left[\begin{matrix} \alpha + r, \beta + r, \alpha + \beta + \frac{1}{2} + r : z \\ \alpha + \beta - \frac{1}{2} + r \end{matrix} \right] = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha + \beta + \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\beta + \frac{1}{2})} e^{-\frac{1}{2}z} z^{\frac{1}{2}(1-\alpha-\beta)} E \left[\begin{matrix} 2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta : z \\ 2\alpha + 2\beta - 1 \end{matrix} \right],$$

wobei $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $R(\alpha) > 0$, $R(\alpha + \beta) > -\frac{1}{2}$.

Literatur

- [1] *F. M. Ragab*: Expansion of an E -funktion in a series of products of E -funktionen. Proc. Glasg. Math. Assoc. 3 (1958), 194—195.
- [2] *F. M. Ragab*: Research report No BR-23 (1957). New York University, Inst. of Math. Science.
- [3] *F. M. Ragab*: An expansion involving confluent hypergeometric funktions. Nieuw. Archief voor Wiskunde (3), VI (1958), 52—54.
- [4] *Mac-Robert, T. M.*: Functions of a Complex Variable (4th edition), London 1954.
- [5] *F. M. Ragab*: Integration of E -funktionen with regard to their parameters. Proc. Glasg. Math. Assoc. 3 (1956), 94—98.
- [6] *F. M. Ragab*: Integration of E -funktionen and related functions with respect to their parameters. Proceedings, Koninkl. Nederl. Ak. van Wetenschappen 61 (1958), 335—340.
- [7] *W. B. Bailey*: Generalized hypergeometric functions. Cambridge tracts in Math. No 32, Cambridge.

Резюме

РЯДЫ ФУНКЦИЙ МАК-РОБЕРТА И УИТТЭКЕРА

Ф. М. РАГАБ (F. M. Ragab), Каиро (У.А. Р.)

Доказывается, что функция Мак-Роберта E , определенная соотношением

$$\begin{aligned}
 E \left[\begin{matrix} \alpha, \beta : p; \alpha_r; z \\ \gamma; q; \varrho_s \end{matrix} \right] &= \Gamma(\beta) \left\{ \Gamma(\gamma - \alpha) \prod_{n=1}^q \Gamma(\varrho_n - \alpha_n) \right\}^{-1} \times \int_0^1 \lambda^{\alpha-1} (1-\lambda)^{\gamma-\alpha-1} d\lambda \times \\
 &\times \prod_{n=1}^q \int_0^1 \lambda_n^{\alpha_n-1} (1-\lambda_n)^{\varrho_n-\alpha_n-1} d\lambda_n \prod_{n=q+1}^p \int_0^\infty e^{-\lambda_n} \lambda_n^{\alpha-1} d\lambda_n \times \\
 &\times \int_0^\infty e^{-\lambda^{-1}} \lambda^{\alpha-1} [1 + \lambda\lambda_1 \dots \lambda_p/z]^{-\beta} d\lambda
 \end{aligned}$$

удовлетворяет соотношению (8), которое и является главным результатом работы. При помощи этого соотношения далее выводятся соотношения (9)–(12) для функции E и для функций Уиттэкера $W_{k,m}(z)$.