Boris A. Pasynkov

О змеевидных бикомпактах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 3, 473–476

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100578`

Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963, Прага

О ЗМЕЕВИДНЫХ БИКОМПАКТАХ

Б. ПАСЫНКОВ, Москва

(Поступило в редакцию 5/VII 1962 г.)

Доказывается, что существует змеевидный бикомпакт S с $\dim S = \operatorname{ind} S = \operatorname{Ind} S = 1$, не являющийся пределом никакого спектра из одномерных полиэдров, и что теорема суммы для размерностей ind и Ind не верна даже в классе змеевидных бикомпактов.

Бикомпакт называется змеевидным, если в любое его открытое покрытие можно вписать такое открытое покрытие $\nu = \{U_1, \ldots, U_s\}$, что каждое множество U_i при $1 < i < s$ переескает лишь множества U_{i-1} и U_{i+1}, а множества U_1 и U_s пересекают лишь множества U_2 и U_{s-1} соответственно.

Известно, что любой змеевидный компакт представляется в виде предела обратного спектра (определение см. в [I]) из отрезков. В [2] R. H. Rosen поставил вопрос о справедливости сформулированного утверждения для произвольного змеевидного бикомпакта. Отвечая на этот вопрос, S. Mardešić построил, [3], змеевидный бикомпакт C с $\operatorname{ind} C = 2$, откуда следует, что этот бикомпакт не будет пределом никакого спектра из 1-мерных полиэдров, в частности из отрезков. Этот результат Mardešić'а можно усилить следующим образом:

Теорема 1. *Существует змеевидный бикомпакт* S *с* $\dim S = \operatorname{ind} S = \operatorname{Ind} S = 1$, *не являющийся пределом никакого спектра из одномерных полиэдров, в частности из отрезков.*

Вторым результатом статьи является

Теорема 2. *Теорема суммы для размерностей* ind *и* Ind *не верна даже в классе змеевидных бикомпактов (будет построен такой змеевидный бикомпакт* R *с* $\operatorname{Ind} R \geqq \operatorname{ind} R = 2 > 1$, *который представляется в виде суммы двух экземпляров змеевидного бикомпакта* S, *а для него* $\operatorname{ind} S = \operatorname{Ind} S = 1$).[1])

Бикомпакт R *дает еще один пример змеевидного* (т. е. 1-мерного в смысле dim) *бикомпакта, двумерного в смысле* ind *и* Ind (первый такой пример содержится в [3]).

[1]) Это утверждение было опубликовано автором в [4].

Теорема 2 является усилением результата О. В. Локуциевского из заметки [5], в которой опровергается справедливость теоремы суммы для размерностей ind и Ind бикомпактов.

Построение бикомпакта S начнем с построения вспомогательного бикомпакта S'. Через $L = \{x\}$ обозначим трансфинитную прямую (в [6] на стр. 871, этот бикомпакт обозначен через $T\Delta(\omega_1 + 1)$, а в [5] этот бикомпакт обозначен через P). Точки x из L, естественным образом соответствующие трансфинитным числам $\alpha \leqq \omega_1$, будем так и обозначать через α. Каждое множество $J_\alpha = \{x : \alpha \leqq x \leqq \alpha + 1\} \subset L$, $\alpha < \omega_1$, гомеоморфно отрезку $[0, 1]$, поэтому каждую точку $x \in J_\alpha$ будем обозначать соответствующей цифрой с индексом α внизу, например, точка $\alpha + 1$ получит обозначения 1_α и $0_{\alpha+1}$. Отрезок $[0, 1]$ обозначим через $I = \{y\}$; канторово множество, обычным образом лежащее на отрезке I, обозначим через C. Произведение $L \times I = \{(x, y)\}$ обозначим через M; множества $\alpha \times I$ и $\alpha \times C \subset M$, $\alpha \leqq \omega_1$, обозначим соответственно через I_α и C_α.

Бикомпакт S' состоит из суммы:

(1) отрезков I_α для всех $\alpha \leqq \omega_1$;

(2) отрезков $J'_\alpha = \{(x, y) : 0_\alpha \leqq x \leqq (\frac{1}{3})_\alpha, y = 0\}$ для всех $\alpha < \omega_1$;

(3) отрезков $J''_\alpha = \{(x, y) : (\frac{2}{3})_\alpha \leqq x \leqq 1_\alpha, y = 1\}$ для всех $\alpha < \omega_1$;

(4) множеств $K_\alpha = \{(x, y) : (\frac{1}{3})_\alpha \leqq x \leqq (\frac{2}{3})_\alpha, y \in C\}$ для всех $\alpha < \omega_1$;

(5) всех отрезков $l_\alpha(y_1, y_2)$, $\alpha < \omega_1$, соединяющих такие точки: $((\frac{1}{3})_\alpha, y_1)$ и $((\frac{2}{3})_\alpha, y_2) \in J_\alpha \times I$, что точки y_1 и $y_2 \in I$ являются концами одного из смежных к множеству C интервалов, причем $y_2 > y_1$.[2])

Бикомпакт S получается из бикомпакта S' склеиванием каждого смежного к канторову совершенному множеству C_{ω_1} интервала и концов этого интервала в точку. Образом отрезка I_{ω_1} после этого склеивания будет вновь отрезок, который мы обознчаим через $\tilde{I}_{\omega_1}$. Отображение (склеивание) отрезка I_{ω_1} на отрезок $\tilde{I}_{\omega_1}$ обозначим через p. Точке $t \in \tilde{I}_{\omega_1}$ приписываем в качестве координат координаты всех точек из прообраза $p^{-1}(t)$. Ясно, что при этом некоторые точки из $\tilde{I}_{\omega_1}$ получат в соответствие континуум пар координат (таких точек на $\tilde{I}_{\omega_1}$ счетное множество, мы их будем называть двойными), а некоторые точки из $\tilde{I}_{\omega_1}$ получат в соответствие лишь одну пару координат (такие точки ны назовем одинарными).

Покажем, что бикомпакт S является змеевидным.

Обозначим через Π_α и Π'_α отображения бикомпактов S и S' соответственно, являющиеся тождественными на множестве $S'_\alpha = \{(x, y) : x < \alpha\}$, и отождествляющими каждую точку $(x, y) \in S$ или $\in S'$ при $x \geqq \alpha$ с точкой (ω_1, y).[3]) Бикомпакты $\Pi_\alpha(S)$ и $\Pi'_\alpha(S')$ обозначим соответственно через X_α и X'_α. При $\beta > \alpha$

[2]) Отрезок I рассматривается в естественном порядке.

положим отображения $\Pi_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ и $\Pi_\alpha'^\beta : X_\beta' \to X_\alpha'$ такими, чтобы выполнялись соотношения $\Pi_\alpha = \Pi_\alpha^\beta . \Pi_\beta$ и $\Pi_\alpha' = \Pi_\alpha'^\beta . \Pi_\beta'$ (чем отображения Π_α^β и $\Pi_\alpha'^\beta$ однозначно определяются).

Бикомпакты X_α и отображения Π_α^β, бикомпакты X_α' и отображения $\Pi_\alpha'^\beta$ образуют трансфинитные вполне упорядоченные спектры $\sum = \{X_\alpha, \Pi_\alpha^\beta\}$ и $\sum' = \{X_\alpha', \Pi_\alpha'^\beta\}$, $\alpha < \omega_1$, проекции которых являются отображениями „на". Нетрудно видеть, что для каждого предельного числа $\alpha_0 \leqq \omega_1$ бикомпакты X_{α_0} и X_{α_0}' являются пределами спектров $\sum_{\alpha_0} = \{X_\alpha, \Pi_\alpha^\beta\}$ и $\sum_{\alpha_0}' = \{X_\alpha', \Pi_\alpha'^\beta\}$, $\alpha < \alpha_0$, соответственно. В частности, бикомпакт S является пределом спектра Σ.

Бикомпакты X_1 и X_1' являются (что нетрудно усмотреть из построения бикомпактов S и S') змеевидными. Предположим, что все бикомпакты X_α и X_α' при $\alpha < \beta$ являются змеевидными.

(1) Если число β предельное, то по лемме I из [3] (утверждающей, что предел спектра из змеевидных бикомпактов с проекциями „на" сам является змеевидным бикомпактом) бикомпакты X_β и X_β' будут змеевидными.

(2) Если число β не предельное, то бикомпакт X_β равен сумме змеевидных бикомпактов $X_{\beta-1}'$ [4]) и $\Pi_\beta(\{(x, y) \in S : x > \beta - 1\} \cup (\beta - 1, 0))$, пересекающихся по концевой[5]) для каждого из этих бикомпактов точке $(\beta - 1, 0)$, т. е. по лемме 2 из [3] бикомпакт X_β будет змеевидным. Аналогичным образом доказывается змеевидность бикомпакта X_β'.

Змеевидность всех бикомпактов X_α, $\alpha < \omega_1$ влечет за собой (по лемме I из [3]) змеевидность бикомпакта S.

В силу змеевидности бикомпакта S имеем равенство $\dim S = 1$. Так как множество $M \setminus I_{\omega_1}$ локально имеет счетную базу, то во всех точках $t_0 \in S \setminus \tilde{I}_{\omega_1}$ выполнено соотношение $\operatorname{ind}_{t_0} S = 1$. Если точка $t_0 = (\omega_1, y_0)$ лежит на отрезке $\tilde{I}_{\omega_1}$, то из построения спектра Σ видно, что в любой окрестности этой точки содержится ее „прямоугольная" окрестность $Vt_0 = \{(x, y) : x > \alpha_0,\ y_1 < y < y_2\}$, $y_1 < y_0 < y_2$, где y_1 и y_2 лежат в некоторых смежных к множеству C интервалах, причем $t_0 \neq (\omega_1, y_1)$ и $t_0 \neq (\omega_1, y_2)$. Граница окрестности Vt_0 0-мерна, т. е. вообще $\operatorname{ind} S = 1$. Так как для бикомпактов из их 1-мерности в смысле ind следует их 1-мерность в смысле Ind, то $\dim S = \operatorname{ind} S = \operatorname{Ind} S = 1$.

Покажем теперь, что бикомпакт S не является пределом никакого обратного спектра из 1-мерных полиэдров.

Если выбросить из бикомпакта S : (1) все отрезки $l_\alpha(y_1, y_2)$, за исключением концов этих отрезков, и (2) точки всех интервалов отрезков I_α, $\alpha < \omega_1$, смежных к множествам C_α, то получим бикомпакт, гомеоморфный бикомпакту L из [7] (пример 3), который не является пределом никакого спектра из 1-мерных полиэдров даже с проекциями „в". По одной теореме из [7] (утверждающей, что лю-

---

[3]) Напомним, что для бикомпакта S при различных y_1 и y_2 точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) могут отождествиться с одной и той же точкой отрезка $\tilde{I}\omega_1$.

[4]) Бикомпакт $X_{\beta-1}'$ является змеевидным по индуктивному предположению.

[5]) Определение концевой точки см., например, в [3], стр. 223.

бой подбикомпакт F бикомпакта X, являющегося пределом спектра из n-мерных полиэдров с проекциями „в“, сам является пределом спектра из n-мерных полиэдров с проекциями „в“) можно заключить, что бикомпакт S не будет пределом никакого спектра из 1-мерных полиэдров, и тем более не будет пределом никакого спектра из отрезков. Теорема 1 доказана.

Из двух экземпляров ${}_1S$ и ${}_2S$ бикомпакта S (так гомеоморфно склеивая их по отрезкам ${}_1\tilde{I}_{\omega_1}$ и ${}_2\tilde{I}_{\omega_1}$, чтобы двойные точки отрезка ${}_1\tilde{I}_{\omega_1}$ склеивались с одинарными точками отрезка ${}_2\tilde{I}_{\omega_1}$) как в [5] получаем бикомпакт R с $\dim R = 1$ (по теореме суммы для размерности dim) и с $\operatorname{Ind} R \geqq \operatorname{ind} R = 2$.

Бикомпакт R является змеевидным, ибо для него (аналогично тому, как это было сделано для бикомпакта S) можно построить трансфинитный вполне упорядоченных спектр из змеевидных бикомпактов.[6])

Литература

[1] *П. С. Александров:* О понятии пространства в топологии, Усп. мат. н., *2*, вып. 1 (17), 1947, 5—57

[2] *R. H. Rosen:* Fixed points for multi-valued functions on snake-like continua. Proc. Amer. Math. Soc., *10*, 1959, 167—173.

[3] *S. Mardešić:* Chainable continua and inverse limits. Glasnik Mat.-Fis. i Astr., *14*, N 3, 1959, 219—232.

[4] *Б. А. Пасынков:* Об обратных спектрах и размерности. Докл. АН СССР, *138*, № 5, 1961, 1013—1015.

[5] *О. В. Локуциевский:* О размерности бикомпактов. Докл. АН СССР, *67*, № 2, 1949, 217—219.

[6] *П. С. Александров, П. С. Урысон:* О компактных топологических пространствах. Труды по топологии и другим областям математики П. С. Урысона, Т. 2, Москва, 1951, 855—963.

[7] *Б. А. Пасынков:* О спектрах и размерности топологических пространств. Мат. сб., *57* (*99*), № 4, 1962, 449—476.

Summary

ON SNAKE-LIKE COMPACT SPACES

B. Pasynkov, Moscow

The following propositions are proved:

Theorem 1. *There exists a snake-like compact space* S, $\dim S = \operatorname{ind} S = \operatorname{Ind} S = 1$, *which cannot be expressed as an inverse limit of one-dimensional polyhedra.*

Theorem 2. *The sum theorem for the dimensions* ind *and* Ind *does not hold in the class of snake-like spaces; more precisely, there exists a snake-like compact space R such that* (i) $\operatorname{ind} R = 2$, (ii) *R is a union of two spaces homeomorphic with the space S from Theorem 1.*

[6]) Выражаясь неточно, такой спектр для R „склеивается“ из двух экземпляров спектра Σ.