Czechoslovak Mathematical Journal

Rudolf Výborný

Über das erweiterte Maximumprinzip

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 1, 116–120

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100604`

Чехословацкий математический журнал, т. 14 (89) 1964 Прага

ÜBER DAS ERWEITERTE MAXIMUMPRINZIP

RUDOLF VÝBORNÝ, Praha

(Eingelangt am 2. April 1962)

In dieser Note werden wir einen Satz ableiten, der bei den Eindeutigkeitssätzen für die dritte Randwertaufgabe für partielle Differentialgleichungen eine Rolle spielt.

Es sei G eine offene Menge des n-dimensionalen euklidischen Raumes, $\dot{G}$ der Rand und $\bar{G}$ die abgeschlossene Hülle der Menge G. Ein für alle mal setzen wir voraus, dass die Funktionen a_{ij}, b_i, c $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ in G definiert sind und

$$c(x) \leqq 0 \quad \text{für} \quad x \in G$$

ist. Zur Abkürzung wird der Differentialausdruck

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u''_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i u'_i + cu$$

als $L(u)$ bezeichnet. Ferner wird vorausgesetzt, dass die quadratische Form $\sum a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ für jedes $x \in G$ positiv semidefinit (oder definit) ist.

Es sei $x^0 \in \dot{G}$ ein Punkt, in welchem die Funktion u ein positives Maximum erreicht, und es gelte

$$L(u) \geqq 0$$

in G. Dann kann man unter gewissen Voraussetzungen, wie zum Beispiel unter der Annahme, dass L elliptisch und dass $\dot{G}$ genügend glatt ist, behaupten, dass

$$\frac{\partial u}{\partial n} < 0 \tag{1}$$

im Punkt x^0 ist, falls diese Ableitung überhaupt vorhanden ist. Aus diesem Satz kann man zahlreiche Folgerungen ziehen. Es wurde zum Beispiel von O. A. OLEJNIK gezeigt, wie man aus diesem Satz nicht nur Eindeutigkeitssätze für die zweite und dritte Randwertaufgabe, sondern auch die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Koeffizienten beweisen kann (vergleiche auch [5]).

Ein Satz, der die Gültigkeit der Ungleichung (1) sichert, ist von O. A. OLEJNIK [1] und E. HOPF [2] für elliptische Gleichungen und von A. FRIEDMAN [3], C. PUCCI [4] und von mit [5] für parabolische Gleichungen bewiesen worden.

In der letzten Zeit sind noch allgemeinere Resultate von M. KRZYŻAŃSKI [6][1]) und A. D. ALEXANDROV bewiesen worden. Von A. D. Alexandrov [7], [8], [9], [10] stammt eine ganze Reihe von Arbeiten über das Maximumprinzip. In diesen Arbeiten sind bedeutende und sehr allgemeine Resultate erzielt worden, nicht nur was den Rand anbelangt, sondern auch was die Koeffizienten die Funktion u selbst und die Voraussetzung $c \leqq 0$ betrifft.

Um unseren Satz aussprechen zu können, müssen wir vorerst einige Definitionen angeben.

Definition 1. Wir bezeichnen die Menge G als *zulässig*, falls eine Funktion g vorhanden ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

1) g ist in $\bar{G}$ stetig und in G zweimal differenzierbar und die partiellen Ableitungen erster Ordnung von g sind in G beschränkt ($|g_i| < M$).

2) $g(x) > 0$ in G und es gilt die Äquivalenzrelation

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \dot{G} .$$

Definition 2. Es sei G eine zulässige Menge und $x^0 \in \dot{G}$. Wir sagen, die Bedingung E (in bezug auf die Funktion g) ist im Punkt x^0 dann erfüllt, wenn

$$\liminf \sum a_{ij} g'_i g'_j > 0 \text{ [2])}$$

ist.

Definition 3. Es sei G eine zulässige Menge und $x^0 \in \dot{G}$. Wir sagen, im Punkt x^0 ist die Bedingung B erfüllt, falls es eine solche Funktion B gibt, bei der folgende Bedingungen bestehen:

1) $B(\tau)$ ist für $0 < \tau < \tau_0$ definiert;

2) $B(\tau)$ ist positiv und stetig;

3) $\displaystyle\int_0^{\tau_0} B(t)\,\mathrm{d}t < +\infty$;

4) $\displaystyle\limsup \frac{|b_i(x)|}{B(g(x))} < 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n$;

5) $\displaystyle\liminf \frac{c(x)\, g(x)}{B(g(x))} > -1$;

6) $\displaystyle\limsup \frac{|a_{ij}(x)\, g''_{ij}(x)|}{B(g(x))} < 1 \quad \text{für} \quad i, j = 1, \ldots, n.$

Definition 4. Es sei G eine zulässige Menge und $x^0 \in \dot{G}$. Wir sagen, dass ein Halbstrahl l, der von x^0 ausgeht, mit der Normalen im Punkt x^0 einen spitzen Winkel im

---

[1]) Den Antrieb zu dieser Note gab das Manuskript von [6] und eine Diskussion mit Prof. K. KRZYŻAŃSKI, dem ich auf diese Weise meine Dankbarkeit ausdrücke.

[2]) Die Zeichen lim inf und lim sup beziehen sich auf den Grenzübergang $x \to x^0$, $x \in G$.

verallgemeinerten Sinne (in Bezug auf die Funktion g) bildet, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

Es gibt eine Umgebung V von x^0 und eine positive Zahl a so, dass die Ungleichung

$$\sum g_i'(x)\, l_i > a$$

für $x \in V \cap l$ besteht.

In dieser Ungleichung bedeuten l_i die Richtungskosinus des (orientierten) Halbstrahls l.

Es kann vorkommen, dass keine Normale im Punkt x^0 existiert, wenn der Halbstrahl l einen spitzen Winkel mit der Normalen im verallgemeinerten Sinne bildet. Aber es gilt: Falls grad g stetig und $\neq 0$ in $\bar{G}$ ist und falls der Halbstrahl mit der Normalen n einen spitzen Winkel bildet, dann bildet l mit n einen spitzen Winkel im verallgemeinerten Sinne.

Satz. *Es sei G eine zulässige Menge. Im Punkt $x^0 \in \dot{G}$ seien die Bedingungen E und B erfüllt. Der Halbstrahl l bilde einen spitzen Winkel im verallgemeinerten Sinne mit der Normalen. Es sei u stetig in $\bar{G}$, zweimal differenzierbar in G, $u(x) < u(x^0)$ für $x \in \bar{G}$, $x \neq x^0$; endlich sei $u(x^0) > 0$ und $L(u) \geqq 0$ in G. Dann gilt*

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in l}} \frac{u(x) - u(x^0)}{|x - x^0|} < 0 \tag{2}$$

($|x - x^0|$ bedeutet den Abstand der Punkte x, x^0).

Bemerkung 1. Ist $c \equiv 0$, dann kann man die Voraussetzung $u(x^0) > 0$ fallen lassen.

Bemerkung 2. Für einen parabolischen Operator L der Form

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u''_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u'_i - u'_n + cu$$

ist die Voraussetzung $c \leqq 0$ überflüssig.

Bemerkung 3. Falls die Normalenableitung $\partial u/\partial n$ im Punkt x^0 vorhanden ist, dann folgt die Ungleichung (1) aus (2).

Bemerkung 4. Selbstverständlich gilt ein analoger Satz für ein negatives Minimum.

Bemerkung 5. Man kann beweisen, dass die Bedingung $u(x) < u(x^0)$ für $x \neq x^0$, $x \in \bar{G}$ durch die schwächere Bedingung $u(x) < u(x^0)$ für $x \in G$ ersetzt werden kann, falls grad g in x^0 stetig ist.

Beweis. Wir setzen $\tau = g(x)$. Sei U eine Umgebung des Punktes x^0, die so gewählt ist, dass

$$\sum a_{ij} g'_i g'_j > \beta\,,$$

$$|b_i(x)| < B(\tau)\,, \quad |a_{ij} g''_{ij}| < B(\tau)\,, \quad c(x)\,\tau > -B(\tau)$$

für $x \in U \cap G$ gilt. Dabei bedeutet β eine positive Konstante. Sei $\alpha = \beta/(2(n^2 + nM + 1))$. Wenn es nötig ist, verkleinern wir U so, dass noch

$$\int_0^\tau B(t)\,\mathrm{d}t < \alpha \tag{3}$$

für $x \in U \cap G$ gilt. Nun definieren wir eine Funktion h durch die Gleichung

$$h(x) = \int_0^\tau B(t)\,(\tau - t)\,\mathrm{d}t + \alpha\tau\,.$$

Für diese Funktion gilt $L(h) > 0$ für $x \in U \cap G$, was aus den Ungleichungen

$$L(h) = B(\tau) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} g'_i g'_j + \varepsilon(\tau) \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} g''_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i g'_i \Big) + \\ + ch > B(\tau)\left[\beta - \varepsilon(\tau)\,(n^2 + nM + 1)\right]$$

folgt. Dabei haben wir der Abkürzung halber

$$\varepsilon(\tau) = \int_0^\tau B(t)\,\mathrm{d}t + \alpha$$

gesetzt. Infolge (3) und der Wahl der Zahl α ist die eckige Klammer positiv.

Weiter wollen wir uns mit der Funktion $v = u + \eta h$ beschäftigen, in der η eine positive Zahl bedeutet. Für die Funktion v gilt

$$L(v) \geqq \eta\, L(h) > 0\,.$$

Deshalb kann v kein positives Maximum in $G \cap U$ erreichen. Für $x \in \overline{U} \cap \dot{G}$ gilt

$$v(x) \leqq u(x^0)\,;$$

diese Ungleichung besteht auch für $x \in \dot{U} \cap G$, falls η genügend klein ist, und es gilt $v(x^0) = u(x^0)$. Daher gilt

$$v(x) < u\,(x^0)$$

für $x \in U \cap G$. Durch eine leichte Umformung bekommen wir

$$\frac{u(x) - u(x^0)}{|x - x^0|} < -\eta\, \frac{h(x) - h(x^0)}{|x - x^0|}\,. \tag{4}$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für jedes $x \in l$ mit $|x - x^0| < \delta$ die Beziehung

$$h(x) - h(x^0) > \alpha g(x) = \alpha |x - x^0| \sum g'_j(x^1)\, l_j > \alpha a |x - x^0|$$

besteht. Aus (4) folgt jetzt (2) durch Grenzübergang. Der Satz ist bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] *О. А. Олейник:* О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. Мат. сборник *30* (*72*), 1952, 695—702.

[2] *E. Hopf:* A remark on linear elliptic differential equations of second order. Proc. Amer. Math. Soc. *3* (1952), 791—793.

[3] *A. Friedman:* Remarks on the maximum principle for parabolic equations. Pacific Journal of Mathematics *8* (1958), 201—211.

[4] *C. Pucci:* Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. Accademia Nazionale dei Lincei Rediconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Natureli *23* (1957), 370—375 and *24* (1958), 3—6.

[5] *R. Výborný:* О некоторых основных свойствах решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа. Чех. мат. журн. *8* (1958), 537—551.

[6] *M. Krzyżański:* Sur l'unicité des solutions des seconds et troisièmes problèmes de Fourier. Ann. Polon. Math. *7* (1960), 201—208.

[7] *А. Д. Александров:* Исследования о принципе максимума 1. Известия высш. учеб. зав. (1958) № 5, 126—157.

[8] *А. Д. Александров:* Исследования о принципе максимума 2. Изв. высш. учеб. зав. (1959) № 3, 3—12.

[9] *А. Д. Александров:* Исследования о принципе максимума 3. Изв. высш. учеб. зав. (1959) № 5, 16—32.

[10] *А. Д. Александров:* Исследования о принципе максимума 4. Изв. высш. учеб. зав. (1960) № 3, 3—15.

[11] *А. Д. Александров:* Исследования о принципе максимума 5. Изв. высш. учеб. зав. (1960) № 5, 16—26.

[12] *А. Д. Александров:* Исследования о принципе максимума 6. Изв. высш. учеб. зав. (1961) № 1, 3—20.

Резюме

О РАСШИРЕННОМ ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА

РУДОЛЬФ ВЫБОРНЫ (Rudolf Výborný), Прага

В работе доказывается теорема, гарантирующая выполнение неравенства (2) для функции u, которая удовлетворяет на множестве G неравенству $Lu \geqq 0$ и непрерывна на $\bar{G}$. При этом x^0 означает точку, в которой функция u достигает своего положительного максимума, и l — полупрямую, которая имеет начало в точке x^0 и образует, в определенном обобщенном смысле, острый угол с нормалью к границе множества G. Условия, налагаемые на оператор L и множество G, в работе точно сформулированы и содержатся, в сущности, в определениях 1—4.