

Jan Kadlec

О принципе максимума для эллиптических уравнений второго порядка и методе Винера

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 1, 154–155

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100608>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1964

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И МЕТОДЕ ВИНЕРА

(Предварительное сообщение)

ЯН КАДЛЕЦ (Jan Kadlec), Прага
(Поступило в редакцию 21/X 1963 г.)

1. Обозначения. Пусть u — решение (в смысле обобщенных функций) уравнения

$$(1) \quad - (a^{ij}u'_j)' = 0$$

в области Ω , где

$$\kappa \delta^{ij} \xi_i \xi_j \leq a^{ij} \xi_i \xi_j \quad (\kappa > 0),$$

$|a^{ij}| < K$ и $u \in W_2^{(1)}(\Omega_1)$ для всех $\Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. Известно, что u тогда удовлетворяет условию Гельдера в любой области $\Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, если только u изменить подходящим образом на множестве меры нуль. Будем поэтому всегда предполагать, что u непрерывна в области Ω .

2. Теорема. Если существует $X_0 \in \Omega$ такое, что

$$u(X_0) = \max_{X \in \Omega} u(X),$$

то u является постоянной в Ω .

3. Теорема. Определим на Ω' функцию $\tilde{u}(X)$ соотношением

$$\tilde{u}(X) = \limsup_{Y \rightarrow X, Y \in \Omega} u(Y).$$

Для u , отличной от постоянной справедливо

$$u(X) < \sup_{Y \in \Omega} \tilde{u}(Y).$$

4. Определение. Пусть $f \in W_2^{(-1)}(\Omega)$. Будем говорить, что $f \leq 0$, если для всех $\varphi \geq 0, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ справедливо $(f, \varphi) \leq 0$.

5. Теорема. Пусть граница области Ω удовлетворяет условию Липшица и $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Пусть, далее, $-(a^{ij}v_j)' = f$ в Ω , где $f \leq 0$. Пусть v в Ω не является постоянной. Тогда

$$v(X) < \sup_{Y \in \Omega'} v(Y) \quad \text{для почти всех } X \in \Omega.$$

6. Определение. Точку $S \in \Omega'$ будем называть регулярной, если

$$\liminf_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\mu(K_\varrho(S) - \Omega)}{\varrho^n} > 0,$$

где $K_\varrho(S)$ — шар с центром S и радиусом ϱ , μ — мера Лебега и n — размерность пространства.

7. Теорема. Пусть Ω — ограниченная область. Тогда существует отображение Z_Ω (или просто Z) пространства $C(\Omega')$ непрерывных функций на Ω' в пространство $C(\Omega)$ функций, непрерывных в области Ω , такое, что для всех $g \in C(\Omega')$

- 1) $\sup_{X \in \Omega} |Z(g)(X)| \leq \sup_{X \in \Omega'} |g(X)|$;
- 2) $Z(g) \in W_2^{(1)}(\Omega_1)$ для всех $\Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ и $Z(g)$ удовлетворяет уравнению (1).
- 3) $|Z(g)|_{W_2^{(1)}(\Omega_1)} \leq \gamma(\Omega_1) |g|_{C(\Omega')}$.
- 4) Для регулярной точки $S \in \Omega'$ существует $\lim_{X \rightarrow Y, X \in \Omega} u(X) = g(Y)$.
- 5) Если $g(X) = \tilde{g}(X)$ для $X \in \Omega'$, где $\tilde{g} \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega) \cap C(\Omega)$, то $Z(g) = \tilde{g} \in \dot{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

8. Определение. Скажем, что $\Omega_m \rightarrow \Omega$ изнутри, если $\Omega_m \subset \Omega$ и для каждого компактного множества $K \subset \Omega$ существует $m(K)$ такое, что для $m > m(K)$ справедливо $K \subset \Omega_m$.

9. Теорема. Пусть $\Omega_m \rightarrow \Omega$ изнутри и \tilde{g} — непрерывное продолжение g на $\bar{\Omega}$. Тогда $Z_{\Omega_m}(\tilde{g}) \rightarrow Z_\Omega(g)$ в норме пространства $C(\bar{\Omega}_*)$ и $W_2^{(1)}(\Omega_*)$ для всех $\Omega_*, \bar{\Omega}_* \subset \bar{\Omega}$.