Jan Kadlec

О принципе максимума для эллиптических уравнений второго порядка и методе Винера

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 1, 154–155

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100608

Чехословацкий математический журнал т. 14 (89) 1964, Прага

О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И МЕТОДЕ ВИНЕРА

(Предварительное сообщение)

ЯН КАДЛЕЦ (Jan Kadlec), Прага

(Поступило в редакцию 21/X 1963 г.)

1. Обозначения. Пусть u — решение (в смысле обобщенных функций) уравнения

$$-\left(a^{ij}u'_i\right)'_j = 0 \tag{1}$$

в области Ω, где

$$\kappa\delta^{ij}\xi_i\xi_j \leqq a^{ij}\xi_i\xi_j \quad (\kappa > 0)\,,$$

$|a^{ij}| < K$ и $u \in W_2^{(1)}(\Omega_1)$ для всех Ω_1, $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. Известно, что u тогда удовлетворяет условию Гельдера в любой области Ω_1, $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, если только u изменить подходящим образом на множестве меры нуль. Будем поэтому всегда предполагать, что u непрерывна в области Ω.

2. Теорема. *Если существует $X_0 \in \Omega$ такое, что*

$$u(X_0) = \max_{X\in\Omega} u(X)\,,$$

то u является постоянной в Ω.

3. Теорема. *Определим на $\Omega^{\cdot}$ функцию $\tilde{u}(X)$ соотношением*

$$\tilde{u}(X) = \limsup_{Y\to X, Y\in\Omega} u(Y)\,.$$

Для u, отличной от постоянной справедливо

$$u(X) < \sup_{Y\in\Omega} \tilde{u}(Y)\,.$$

4. Определение. Пусть $f \in W_2^{(-1)}(\Omega)$. Будем говорить, что $f \leqq 0$, если для всех $\varphi \geqq 0$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ справедливо $(f, \varphi) \leqq 0$.

5. Теорема. *Пусть граница области Ω удовлетворяет условию Липшица и $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$. Пусть, далее, $-(a^{ij}v_i')_j' = f$ в Ω, где $f \leqq 0$. Пусть v в Ω не является постоянной. Тогда*

$$v(X) < \operatorname*{supess}_{Y \in \Omega^\cdot} v(Y) \quad \textit{для почти всех} \quad X \in \Omega\,.$$

6. Определение. Точку $S \in \Omega^\cdot$ будем называть регулярной, если

$$\liminf_{\varrho \to 0+} \frac{\mu(K_\varrho(S) - \Omega)}{\varrho^n} > 0\,,$$

где $K_\varrho(S)$ — шар с центром S и радиусом ϱ, μ — мера Лебега и n — размерность пространства.

7. Теорема. *Пусть Ω — ограниченная область. Тогда существует отображение Z_Ω (или просто Z) пространства $C(\Omega^\cdot)$ непрерывных функций на $\Omega^\cdot$ в пространство $C(\Omega)$ функций, непрерывных в области Ω, такое, что для всех $g \in C(\Omega^\cdot)$*

1) $\sup\limits_{X \in \Omega} |Z(g)(X)| \leqq \sup\limits_{X \in \Omega^\cdot} |g(X)|$;

2) $Z(g) \in W_2^{(1)}(\Omega_1)$ *для всех* $\Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$ *и* $Z(g)$ *удовлетворяет уравнению* (1).

3) $|Z(g)|_{W_2^{(1)}(\Omega_1)} \leqq \gamma(\Omega_1)\, |g|_{C(\Omega^\cdot)}$.

4) *Для регулярной точки* $S \in \Omega^\cdot$ *существует* $\lim\limits_{X \to Y, X \in \Omega} u(X) = g(Y)$.

5) *Если* $g(X) = \tilde{g}(X)$ *для* $X \in \Omega^\cdot$, *где* $\tilde{g} \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega) \cap C(\Omega)$, *то* $Z(g) - \tilde{g} \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

8. Определение. Скажем, что $\Omega_m \to \Omega$ извнутри, если $\Omega_m \subset \Omega$ и для каждого компактного множества $K \subset \Omega$ существует $m(K)$ такое, что для $m > m(K)$ справедливо $K \subset \Omega_m$.

9. Теорема. *Пусть $\Omega_m \to \Omega$ извнутри и $\tilde{g}$ — непрерывное продолжение g на $\bar{\Omega}$. Тогда $Z_{\Omega_m}(\tilde{g}) \to Z_\Omega(g)$ в норме пространства $C(\bar{\Omega}_*)$ и $W_2^{(1)}(\Omega_*)$ для всех Ω_*, $\bar{\Omega}_* \subset \Omega$.*