Jan Kadlec

О регулярности решения задачи Пуассона на области с границей, локально подобной границе выпуклой области

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 3, 386–393

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100628

Чехословацкий математический журнал, т. 14 (89) 1964, Прага

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПУАССОНА НА ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ, ЛОКАЛЬНО ПОДОБНОЙ ГРАНИЦЕ ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

ЯН КАДЛЕЦ (Jan Kadlec), Прага

(Поступило в редакцию 1/II 1963 г.)

Доказывается существование и интегрируемость с квадратом вторых производных решения задачи Пуассона на области, локально подобной границе выпуклой области, если правая часть уравнения интегрируема с квадратом.

1. Введение. В настоящей работе расширим достижения работы [1] на области типа $\mathfrak{R}$. Для $\Omega \in \mathfrak{R}$ мы докажем теорему:

Теорема. *Если* $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ *— решение задачи Пуассона* $Au = f$, *где* $f \in L_2(\Omega)$ *и эллиптический дифференциальный оператор второго порядка* A *обладает коэффициентами, удовлетворяющими условию Липшица, тогда справедливо неравенство*

$$|u|_{W_2^{(2)}(\Omega)} \leqq C|f|_{L_2(\Omega)}\,,$$

где C *не зависит от выбора функции* f.

Множество $\mathfrak{R}$, данное определением 11, является множеством таких областей, которые в окрестности всякой точки границы подобны некоторой выпуклой области.

Так как мы будем пользоваться достижениями работы [1], то сохраним обозначения этой работы.

В настоящей работе повторяются идеи доказательств некоторых теорем работы [1]; итак, соответствующие теоремы не будем подробно доказывать.

Существенную роль при обобщении теоремы 20 работы [1] играет следующее определение и теоремы 3 и 4.

2. Определение. Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}$, $\Omega_k \in \mathfrak{A}$. Скажем, что $\Omega_k \to \Omega$ извнутри, если справедливо:

1) $\Omega_k \subset \Omega$. 2) Если $M \subset \Omega$ — замкнутое множество, то существует k_0 (которое зависит от M) такое, что для всех $k \geqq k_0$ справедливо $M \subset \Omega_k$.

$\mathring{W}_2^{(-1)}(\Omega)$ обозначает пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Известно, что $L_2(\Omega) \subset \mathring{W}_2^{(-1)}(\Omega)$. Обозначим $\ast W_2^{(2)}(\Omega) = W_2^{(2)}(\Omega) \cap \cap \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

3. Теорема. *Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}$ и пусть $\Omega_k \to \Omega$ извнутри. Пусть a^{ij} — ограниченные измеримые функции и A — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка. Пусть, далее, $f \in \mathring{W}_2^{(-1)}(\Omega)$ и u_k, и являются решениям задач Пуассона*

$$\begin{aligned} Au_k &= f \quad \text{в} \quad \Omega_k\,, \quad u_k = 0 \quad \text{на} \quad \dot{\Omega_k}\,, \\ Au &= f \quad \text{в} \quad \Omega\,, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \dot{\Omega}\,. \end{aligned}$$

Тогда имеет место следующее утверждение: Если определим $u_k(X) = 0$ для всех $X \notin \Omega_k$, то $u_k \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$ в пространстве $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Доказательство находится в работе [2].

4. Теорема. *Пусть $\Omega \in \mathfrak{A}$ и $u_m \in L_1(\Omega)$ такие, что*

$$\frac{\partial^k u_m}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \in L_p(\Omega) \quad (p > 1)$$

и

$$\left| \frac{\partial^k u_m}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right|_{L_p(\Omega)} \leqq C$$

для всех m.

Пусть $u \in L_1(\Omega)$ и пусть для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ имеет место

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m \varphi \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega u \varphi \, \mathrm{d}\Omega\,.$$

Тогда и обладает обобщенной производной

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \in L_p(\Omega)\,.$$

Доказательство. Если $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, то

$$(1) \qquad \lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \lim_{m\to\infty} (-1)^k \int_\Omega \frac{\partial^k u_m}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \varphi \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \mathrm{d}\Omega\,.$$

Так как $\mathscr{D}(\Omega)$ плотно в $L_q(\Omega)$ $(1/p + 1/q = 1)$ и последовательность

$$v_m = \frac{\partial^k u_m}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$$

является ограниченной в $L_p(\Omega)$, то v_m слабо стремится в $L_p(\Omega)$ к некоторой функции $v \in L_p(\Omega)$.

Из (1) предельным переходом получим

$$\int_\Omega u \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \, d\Omega = (-1)^k \int_\Omega v\varphi \, d\Omega \; ;$$

итак, v является обобщенной производной функции u.

5. Определение. Открытое ограниченное множество Ω, замыкание которого является пересечением конечного числа полупространств Q_i пространства E_n, будем называть $\mathfrak{L}$-многогранником, если для всех $X \in \Omega^\cdot$ верно следующее:

Если $X \in \bigcap_{j=1}^{l} Q^\cdot_{i_j}$, где $Q^\cdot_{i_j} \neq Q^\cdot_{i_k}$ для $j \neq k$ и $X \notin Q^\cdot_i$ для $i \notin \{i_1, \dots, i_l\}$, то $l \leqq n$, и гиперплоскости $Q^\cdot_{i_j}$ линейно независимы.

6. Замечание. *$\mathfrak{L}$-многогранник является элементом $\mathfrak{L}$. Можно предполагать, что все отображения S и T из определения множества типа $\mathfrak{L}$ являются линейными.*

Доказательство. Пусть $X \in \Omega^\cdot$, значит, $X \in \bigcap_{j=1}^{l} Q^\cdot_{i_j}$. Так как $X \notin \bigcup_{k \notin \{i_1, \dots, i_l\}} Q^\cdot_k$, то существует ограниченная окрестность U точки X такая, что $U \cap \bigcup_{k \notin \{i_1, \dots, i_l\}} Q^\cdot_k = \emptyset$ и $U \subset \bigcup_{k \notin \{i_1, \dots, i_k\}} Q_k$. Из этого следует, что $\Omega \cap U = \Omega \cap \bigcap_{j=1}^{l} Q_{i_j}$.

Пусть Q_i задано неравенством $\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j < d_{i0}$. Обозначим $\mathbf{d}_i = (d_{i1}, \dots, d_{in})$. Векторы $\mathbf{d}_{i_j}$ $(j = 1, \dots, l)$ линейно независимы; итак, существует $n - l$ векторов $\mathbf{d}'_{l+1}, \dots, \mathbf{d}'_n$ таких, что векторы $\mathbf{d}_{i_1}, \dots, \mathbf{d}_{i_l}, \mathbf{d}'_{l+1}, \dots, \mathbf{d}'_n$ образуют базис пространства E_n. Пусть $\mathbf{d}'_i = (d'_{i1}, \dots, d'_{in})$.

Теперь определим отображение T с помощью равенств

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} d_{i_k j} x_j \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, l \, ,$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} d'_{kj} x_j \quad \text{для} \quad k = l + 1, \dots, n \, .$$

Если $V = TU$, то, очевидно, $T(\Omega \cap U) = K \cap V$, где K — достаточно большой куб такой, что его грани, проходящие через точку $Y = TX$ лежат в гиперплоскостях

$$y_k = d_{i_k 0} \quad (k = 1, \dots, l) \, .$$

7. Теорема. *Пусть Ω является $\mathfrak{L}$-многогранником. Тогда $^*\mathscr{E}(\Omega)$-плотное множество в $^*W_2^{(2)}(\Omega)$.*

Доказательство. $\Omega \in \mathfrak{L}$; итак, если $X \in \bar{\Omega}$, то существует окрестность $\mathscr{U}$, которая обладает свойствами, данными в определении области типа $\mathfrak{L}$ (смотри работу [1]).

Мы тоже будем требовать, чтобы имели место утверждения замечания 16 работы [1]. Теперь существует конечное число $\mathscr{U}_1, \ldots, \mathscr{U}_m$ выше описанных окрестностей, которые покрывают $\bar{\Omega}$.

Далее, существуют окрытые $\mathscr{U}'_i$ так, что $\mathscr{U}'_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ тоже покрывают $\bar{\Omega}$ и $\overline{\mathscr{U}'_i} \subset \mathscr{U}_i$. Множествам $\mathscr{U}'_1, \ldots, \mathscr{U}'_m$ соответствует разложение единицы $\varphi_1, \ldots, \ldots, \varphi_m$. Далее, существуют функции $\psi_i \in \mathscr{E}(\Omega)$, которые обладают следующими свойствами:

$$\psi_i(X) = 1 \quad \text{для всех} \quad X \in \mathscr{U}'_i \quad \text{и} \quad \psi_i(X) = 0 \quad \text{для всех} \quad X \notin \mathscr{U}_i .$$

Пусть $u \in {}^*W_2^{(2)}(\Omega)$ и пусть, далее, $\varepsilon > 0$. Обозначим $u_i = u\varphi_i$. Очевидно, что $u_i \in {}^*W_2^{(2)}(\mathscr{U}_i \cap \Omega)$, и вследствие свойств отображений T, S и окрестности $\mathscr{U}_i$ можно по теореме 12 работы [1] приближать u_i в норме ${}^*W_2^{(2)}(\mathscr{U}_i \cap \Omega)$ с любой точностью функцией из ${}^*\mathscr{E}(\mathscr{U}_i \cap \Omega)$.

Итак, существует $u_i^* \in {}^*\mathscr{E}(\mathscr{U}_i \cap \Omega)$ так, что для $u_i = \psi_i u_i$ и $\psi_i u_i^*$, которую мы на $\Omega - \mathscr{U}_i$ продолжим нулем, справедливо:

1) $\psi_i u_i^* \in {}^*\mathscr{E}(\Omega)$,

2) $|\psi_i u_i^* - u_i|_{*W(\Omega)} = |\psi_i(u_i^* - u_i)|_{*W(\Omega)} \leqq C(\psi_i)\, |u_i^* - u_i|_{W_2^{(2)}(\mathscr{U}_i \cap \Omega)} \leqq \varepsilon/m$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Если обозначим

$$u^* = \sum_{i=1}^{m} \psi_i u_i^* ,$$

то $u^* \in {}^*\mathscr{E}(\Omega)$ и $|u^* - u|_{*W(\Omega)} = \left| \sum_{i=1}^{m} (\psi_i u_i^* - u_i) \right|_{*W(\Omega)} \leqq \varepsilon$.

Тоерема доказана.

8. Теорема. *Пусть Ω является $\mathfrak{L}$-многогранником. Пусть $u \in {}^*W_2^{(2)}(\Omega)$, A — — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами и константой эллиптичности α. Тогда имеет место оценка*

$$|u|_{*W} \leqq \frac{1}{\alpha} |Au|_{L_2} . \tag{2}$$

Доказательство. Так как имеет место теорема 7, можно (2) доказывать только для $u \in {}^*\mathscr{E}(\Omega)$.

Мы можем тоже предполагать, что A является симметричным оператором. Если два раза воспользуемся интегрированием по частям, получим (смотри работу [1], теорему 11)

$$\int_\Omega |Au|^2 \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega a^{ij} a^{kl} u''_{ik} u''_{jl} \, \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega^\cdot} (a^{ij} a^{kl} - a^{ik} a^{jl})\, u''_{kl} u'_i v_j \, \mathrm{d}\Omega^\cdot .$$

Второе слагаемое разделим на суму интегралов, каждый из которых берется по некоторой плоской части $\Omega^{\cdot}$.

Пусть теперь Λ – некоторая из этих частей. Введем местные координаты $[y_1, \ldots, y_n]$ так, что координатная ось y_n направлена по внешней нормали к Λ. Пусть $x_i = c^{ij} y_j$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial y_j} c^{ij}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \, \partial y_l} c^{ik} c^{jl}, \quad v_i = c^{ij} v_j^*,$$

где v_j^* – координаты внешней нормали в новой системе координат.

Итак

$$\left(a^{ij} a^{kl} - a^{ik} a^{jl}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_i} v_j = \left(\tilde{a}^{ij} \tilde{a}^{kl} - \tilde{a}^{ik} \tilde{a}^{jl}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \, \partial y_l} \frac{\partial u}{\partial y_i} v_j^*,$$

где

$$\tilde{a}^{ij} = \sum_{k,l} a^{kl} c^{ki} c^{lj}.$$

Теперь точно таким образом, как в доказательстве тоеремы 11 работы [1] получим

$$\left(\tilde{a}^{ij} \tilde{a}^{kl} - \tilde{a}^{ik} \tilde{a}^{jl}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \, \partial y_l} \frac{\partial u}{\partial y_i} v_j^* = 0$$

и

$$\int_\Lambda \left(a^{ij} a^{kl} - a^{ik} a^{jl}\right) u''_{kl} u'_i v_j \, \mathrm{d}\Lambda = 0.$$

Это рассуждение имеет место на всех плоских частях $\Omega^{\cdot}$; итак,

$$\int_\Omega |Au|^2 \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega a^{ij} a^{kl} u''_{ik} u''_{jl} \, \mathrm{d}\Omega,$$

откуда (смотри лемму 10 работы [1]) вытекает соотношение (2).

9. Теорема. *Пусть Ω – выпуклая ограниченная область в E_n. Тогда существует последовательность $\mathfrak{L}$-многогранников Ω_n, которая извнутри стремится к области Ω.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. $\Omega^{\cdot}$ является компактным множеством; следовательно существует конечная $\frac{1}{2}\varepsilon$ – сеть $X_1, \ldots, X_m$ границы $\Omega^{\cdot}$.

Если $X \in \Omega^{\cdot}$, то существует гиперплоскость $\pi(X)$, проходящая через точку X и такая, что $\pi(X) \cap \Omega = \emptyset$.

Полупространство, определенное гиперплоскостью $\pi(X)$, в котором находится Ω, обозначим $P(\pi(X))$. Обозначим, далее,

$$P_i = P(\pi(X_i)), \quad i = 1, \ldots, m$$

и P'_i – полупространство в E_n, определенное соотношениями

$$P'_i \subset P_i, \quad \varrho(P'_i, X_i) = \varepsilon.$$

Далее, существуют полупространства Q_i так, что

1) $\varrho(X_i, Q_i) > \frac{1}{2}\varepsilon$,

2) $P'_i \cap \Omega \subset Q_i$,

3) $Q_i \neq Q_j$ $(i \neq j)$, причем каждые n гиперплоскостей $Q^{\cdot}_i$ линейно независимы.

Обозначим

$$\Omega^{(\varepsilon)} = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i\,.$$

$\Omega^{(\varepsilon)}$ является, очевидно, или $\mathfrak{L}$-многогранником или пустым множеством.

Если $X \in \Omega^{\cdot}$, то существует i так, что $\varrho(X, X_i) < \frac{1}{2}\varepsilon$, итак, $X \notin Q_i$ и $X \notin \Omega^{(\varepsilon)}$. Из этого вытекает, что $\Omega^{\cdot} \cap \Omega^{(\varepsilon)} = \emptyset$.

Пусть M — компактное подмножество Ω и обозначим $\varepsilon(M) = \varrho(M, \Omega^{\cdot})$. Очевидно, что для $\varepsilon < \varepsilon(M)$ справедливо $\bar{M} \subset \Omega^{(\varepsilon)}$. Пусть точка $S \in \Omega$ и $\varepsilon_0 = \varrho(S, \Omega^{\cdot})$. Для $\varepsilon < \varepsilon_0$ является $\Omega^{(\varepsilon)}$ связной областью, значит, $\Omega^{(\varepsilon)} \subset \Omega$.

Пусть, далее, $n_0 > 1/\varepsilon_0$, n_0 — целое число. Если теперь определим

$$\Omega_n = \Omega^{1/(n+n_0)}\,,$$

то теорема является вполне доказанной.

10. Теорема. *Пусть Ω — выпуклая ограниченная область в E_n. Пусть A — — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с константой эллиптичности α и постоянными коэффициентами. Пусть, далее, $u \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ является решением задачи Пуассона $Au = f$, где $f \in L_2(\Omega)$.*

Тогда $u \in {}^*W_2^{(2)}(\Omega)$ и имеет место оценка

$$|u|_{*W} \leqq \frac{1}{\alpha}\,|f|_{L_2}\,.$$

Доказательство. (Упрощенное Й. Нечасом.) Пусть Ω_n — области из теоремы 9. Обозначим через u_n решение задачи $Au_n = f$ в Ω_n, $u_n \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega_n)$.

Из теоремы 20 работы [1] вытекает $u_n \in {}^*W_2^{(2)}(\Omega_n)$, и из теоремы 8 настоящей работы следует

$$|u_n|_{*W(\Omega_n)} \leqq \frac{1}{\alpha}\,|f|_{L_2(\Omega)}\,.$$

Пусть Ω^* обозначает подобласть Ω, $\overline{\Omega^*} \subset \Omega$. Из теоремы 3 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - u|_{L_2(\Omega^*)} = 0\,,$$

где предполагаем, что $n > n_0(\Omega^*)$ так, чтобы $\Omega_n \supset \Omega^*$.

Теперь

$$|u_n|_{*W(\Omega^*)} \leqq |u_n|_{*W(\Omega_n)} \leqq \frac{1}{\alpha}\,|f|_{L_2(\Omega)}\,.$$

Существует выбранная последовательность u_n, для которой существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i\, \partial x_j} \right|_{L_2(\Omega^*)} = l_{ij}\,,$$

для всех i, j.

Из теоремы 4 следует существивание обобщенной производной $\partial^2 u/\partial x_i\, \partial x_j$ и имеет место оценка

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \right|_{L_2(\Omega^*)} \leqq l_{ij}\,.$$

Итак,

$$|u|_{*W(\Omega^*)} \leqq \sqrt{\sum l_{ij}^2} = \lim_{n\to\infty} |u_n|_{*W(\Omega^*)} \leqq \frac{1}{\alpha}\, |f|_{L_2(\Omega)}\,.$$

Теперь из неравенства

$$|u|_{*W(\Omega^*)} \leqq \frac{1}{\alpha}\, |f|_{L_2(\Omega)}$$

предельным переходом $\Omega^* \to \Omega$ следует утверждение теоремы.

11. Определение. Мы скажем, что $\Omega \in \mathfrak{R}$, если Ω обладает следующими свойствами:

1) $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$,

2) Каждой точке $X \in \bar{\Omega}$ соответствует окрестность $\mathcal{U}$ и обратимое отображение T окрестности $\mathcal{U}$ на окрестность $\mathcal{V} = T(\mathcal{U})$ точки $Y = TX$ так, что

а) S и T непрерывны, и вторые обобщенные производные функций, определяющих S и T, являются ограниченными функциями.

б) Справедливо соотношение $\mathcal{U} \cap \Omega = S(K \cap \mathcal{V})$, где K – выпуклая ограниченная область.

Если $\Omega \in \mathfrak{R}$, то будем говорить, что граница Ω (локально) подобна границе выпуклой области.

Если имеет место 2) в точке X, то граница Ω в точке X подобна границе выпуклой области.

12. Замечание. Окрестности $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, очевидно, можно уменьшить так, чтобы $\mathcal{V} \cap K$ была выпуклой областью.

Следующее утверждение мы введем без доказательства:

13. Теорема. *Если Ω является ограниченной выпуклой областью, то $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$.*

14. Теорема. *Пусть $\Omega \in \mathfrak{R}$. Пусть u – решение задачи Пуассона $Au = f$ на Ω, $u = 0$ на $\Omega^{\cdot}$ и $f \in L_2(\Omega)$. Пусть $a_k^{ij'}$ – ограниченные измеримые функции на Ω. Пусть, далее, оператор A является эллиптическим в области Ω.*

Тогда $u \in {}^*W_2^{(2)}(\Omega)$ и существует постоянная C такая, что

$$|u|_{*W} \leqq C|f|_{L_2}\,.$$

Доказательство является точным повторением доказательства теоремы 20 работы [1], если воспользоваться соответствующими теоремами для K, которая является выпуклой областью, и мы его не будем повторять.

Литература

[1] *Ян Кадлец:* О регулярности решения задачи Пуассона на области с границей подобной границе куба. Чехосл. мат. журн., *13 (88)*, 1963, 599—611.

[2] *И. Бабушка:* Устойчивость областей определения по отношению к основным задачам теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости. Чехосл. мат. журн. *11 (86)*, 1961, 76—165.

[3] *А. И. Кошелев:* Априорные оценки в L_p и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем. Успехи мат. науке *XII*, вып. 4, 1958, 29—86.

[4] *О. А. Ладыженская:* Об интегральных оценках, сходимости приближенных методов и решений в функционалах для линейных эллиптических операторов. Вестник Ленинград. Унив., 1958, № 7, 60—69.

[5] *E. Magenes, G. Stampacchia:* I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo elittico. Annali di Pisa, Ser. III., Vol. *XII.*, Fasc. III (1958), 247—357.

[6] *А. И. Мальцев:* Основы линейной алгебры. Москва 1948.

[7] *Й. Нечас:* О решениях эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с неограниченным интегралом Дирихле. Чехосл. мат. журн. *10 (85)*, 1960, 283—298.

[8] *L. Nirenberg:* Remarks on Strongly Elliptic Partial Differential Equations. Communications on Pure and Applied Mathematics, *VIII*, 1955, 649—675.

[9] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов:* Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва 1959.

Summary

ON THE REGULARITY OF THE SOLUTION OF THE POISSON PROBLEM ON A DOMAIN WITH BOUNDARY LOCALLY SIMILAR TO THE BOUNDARY OF A CONVEX OPEN SET

JAN KADLEC, Praha

In this paper, it is proved that the solution of the elliptic differential equation of the second order

$$-\left(a^{ij}u_i'\right)_j' = f$$

with the boundary condition $u = 0$ on $\Omega^{\cdot}$, where $a^{ij}\xi_i\xi_j \geqq \alpha\delta^{ij}\xi_i\xi_j$ $(\alpha > 0)$ for all ξ_i, coefficients a^{ij} fulfil a Lipschitz condition on Ω and $f \in L_2(\Omega)$, has all derivatives of the second order and these derivatives are square integrable on Ω if the following conditions hold:

To each point $X \in \Omega^{\cdot}$ there exist a neighbourhood $\mathcal{U}$ of X and a one-to-one regular transformation T of $\mathcal{U}$ on a domain $\mathcal{V}$ such that $T(\mathcal{U} \cap \Omega)$ is a convex set and all the second order derivatives of T are bounded on $\mathcal{U}$.