

Ladislav Procházka

Заметка о квази-изоморфизме групп без кручения конечного ранга

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 1, 1–8

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100648>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ЗАМЕТКА О КВАЗИ-ИЗОМОРФИЗМЕ ГРУПП
БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

(Поступило в редакцию 11/V 1962 г.)

В этой заметке решается положительно один вопрос, поставленный в статье [1].

В конце статьи [1] сформулирован следующий вопрос: Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга n , содержащая такую свободную подгруппу F ранга n , что максимальная полная подгруппа p -примарного слагаемого периодической группы A/F обладает для каждого простого числа p рангом не меньшим чем $n - 1$. Можно тогда утверждать, что каждая квази-изоморфная с A группа уже изоморфна A ? В этой заметке покажем, что ответ на этот вопрос положителен.

В следующих рассуждениях мы будем пользоваться результатами из [3] и [4], следовательно, понятия как p -число, p -матрица, p -примитивная подгруппа, p -матрица некоторой p -примитивной подгруппы, каноническая p -матрица и т. д., которые определены в [3] (см. также [4], § 1), будем считать известными; притом будем пользоваться обозначениями из [4], которые не отличаются по существу от обозначений из [3]. Кроме того, условимся под словом группа всюду понимать аддитивно записанную абелеву группу.

Определение. Пусть G — группа без кручения конечного ранга r . Группу G будем называть BP -группой, если она содержит такую свободную подгруппу U ранга r , что для каждого простого числа p имеет место неравенство

$$(1) \quad r_p^*(G/U) \geq r - 1;$$

здесь символом $r_p^*(G/U)$ обозначаем ранг максимальной полной подгруппы p -примарного слагаемого периодической группы G/U .

Если символ $r_p(G)$ представляет p -ранг группы без кручения конечного ранга G (см. [4], определение 3), то из предшествующего определения в силу теоремы 4 из [4] следует

Лемма 1. *Группа без кручения G конечного ранга r является BP -группой в точности тогда, когда для каждого простого числа p будет $r_p(G) \geq r - 1$, или, если неравенство (1) имеет место для каждого p и для каждой свободной подгруппы U ранга r .*

Ещё напомним, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Если группа без кручения конечного ранга G является BP -группой, то BP -группой будет и всякая подгруппа H конечного индекса в G .*

Доказательство. Так как H — подгруппа конечного индекса в G , то по теореме 5 из [4] для каждого простого числа p будет $r_p(H) = r_p(G)$. Теперь достаточно применить лемму 1.

Если G — группа без кручения, то под базисом группы G будем понимать произвольное максимальное в G семейство линейно независимых элементов.

Теорема 1. *Пусть G — группа без кручения конечного ранга r , являющаяся BP -группой, и пусть H — такая подгруппа в G , что $G/H \cong \mathcal{C}(p_1)$, где p_1 — простое число. Тогда $G \cong H$.*

Доказательство. При доказательстве теоремы воспользуемся результатами из [3]. Именно, найдем базис группы G , базис её подгруппы H и систему p -матриц (в [3] говорится о системе p_i -матриц) такую, что она будет системой p -матриц группы G относительно базиса, выбранного в G , и одновременно системой p -матриц группы H относительно базиса, выбранного в H . Этим будет доказано, что группы G и H изоморфны (см. [3], теорема 6).

Пусть $B = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ — произвольный базис группы H , пусть p_1, p_2, \dots — последовательность всех (положительных) простых чисел, и пусть

$$(2) \quad [\mathfrak{M}^{(p_1)}, \mathfrak{M}^{(p_2)}, \dots, \mathfrak{M}^{(p_i)}, \dots]$$

— некоторая система p -матриц группы H относительно базиса B . Притом будем предполагать, что p_1 -матрица $\mathfrak{M}^{(p_1)}$ представлена в каноническом виде (см. формулу (1,8) из [4]); такое предположение допустимо, как показывает теорема 5 из [3]. Очевидно, B служит одновременно базисом для группы G , и нашей ближайшей целью будет определение некоторой системы p -матриц всей группы G относительно базиса B .

Положим $\{B\} = \{x_1\} \dot{+} \{x_2\} \dot{+} \dots \dot{+} \{x_r\} = U$ и для каждого простого числа p символом $\Gamma^{(p)}(G; B)$ (соотв. $\Gamma^{(p)}(H; B)$) обозначим множество всех элементов $g \in G$ (соотв. $g \in H$) таких, что для удобного неотрицательного числа k будет $p^k g \in U$; ясно, что только-что определенные множества являются подгруппами. Притом подгруппа $\Gamma^{(p)}(G; B)$ (соотв. $\Gamma^{(p)}(H; B)$) служит в точности p -примитивной подгруппой группы G (соотв. H) относительно базиса B .

Если положим $\tilde{G} = G/U$ и $\tilde{H} = H/U$ и если символом $\tilde{G}^{(p)}$ (соотв. $\tilde{H}^{(p)}$)

обозначим p -примарное слагаемое периодической группы \tilde{G} (соотв. \tilde{H}), то из изоморфизма

$$\mathcal{C}(p_1) \cong G/H \cong (G/U)/(H/U) = \tilde{G}/\tilde{H}$$

следуют равенства

$$(3) \quad \tilde{G}^{(p_i)} = \tilde{H}^{(p_i)} \quad (i = 2, 3, \dots)$$

и соотношение

$$(4) \quad \mathcal{C}(p_1) \cong \tilde{G}^{(p_1)}/\tilde{H}^{(p_1)}.$$

Так как для каждого простого числа p имеем

$$\tilde{G}^{(p)} = \Gamma^{(p)}(G; B)/U, \quad \tilde{H}^{(p)} = \Gamma^{(p)}(H; B)/U,$$

то из (3) получим

$$(5) \quad \Gamma^{(p_i)}(G; B) = \Gamma^{(p_i)}(H; B) \quad (i = 2, 3, \dots),$$

и из (4) по второй теореме об изоморфизме вытекает

$$(6) \quad \mathcal{C}(p_1) \cong \Gamma^{(p_1)}(G; B)/\Gamma^{(p_1)}(H; B).$$

Так как G является по предположению BP -группой, то в силу леммы 1 будет $r_{p_1}(G) \geq r - 1$, значит, либо $r_{p_1}(G) = r - 1$, либо $r_{p_1}(G) = r$. Но если бы было $r_{p_1}(G) = r$, то по теоремам 4 и 1 из [4] группа $\tilde{G}^{(p_1)}$ должна была бы быть полной; это невозможно, так как полная группа $\tilde{G}^{(p_1)}$ не содержала бы подгруппы $\tilde{H}^{(p_1)}$ удовлетворяющей соотношению (4). Итак, $r_{p_1}(G) = r - 1$ и одновременно $r_{p_1}(H) = r - 1$ (см. лемму 2 и её доказательство). Отсюда в силу теоремы 3 из [4] следует, что каноническая p_1 -матрица $\mathfrak{M}^{(p_1)}$ имеет вид

$$(7) \quad \mathfrak{M}^{(p_1)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p_1), 0, & \dots, 0, & \alpha_1(p_1) \\ 0, & \mathfrak{p}_\infty(p_1), \dots, 0, & \alpha_2(p_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, \mathfrak{p}_\infty(p_1), \alpha_{r-1}(p_1) \\ 0, & 0, & \dots, 0, & \mathfrak{p}_n(p_1) \end{pmatrix},$$

где n — целое неотрицательное число и $\alpha_i(p_1)$ ($i = 1, 2, \dots, r - 1$) — удобные целые p_1 -адические числа, представленные в виде последовательностей целых рациональных чисел: $\alpha_i(p_1) = (a_i^{(j)})_{j=1}^\infty$ ($i = 1, 2, \dots, r - 1$). По предположению, (2) служит системой p -матриц группы H относительно базиса B , следовательно, в H существуют элементы

$$(8) \quad g_i^{(j)} = \frac{1}{p_1^j} (x_i + a_i^{(j)} x_r) \quad (i = 1, 2, \dots, r - 1; j = 1, 2, \dots)$$

и элемент $(1/p_1^n) x_r$ такие, что имеет место формула (см. [3], § 2 и § 3, замечание 1, или, см. [4], § 1)

$$(9) \quad \Gamma^{(p_1)}(H; B) = \{g_i^{(j)} (i = 1, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots), g_n\}_z$$

где $g_n = (1/p_1^n) x_r$.

Если $\tilde{D}^{(p_1)}$ — максимальная полная подгруппа группы $\tilde{H}^{(p_1)}$, то из изоморфизма (4) следует, что $\tilde{D}^{(p_1)}$ служит одновременно максимальной полной подгруппой для всей группы $\tilde{G}^{(p_1)}$. Тогда в силу теоремы 1 из [4] должно быть

$$(10) \quad \Gamma^{(p_1)}(G; B)/U = \tilde{G}^{(p_1)} = \tilde{D}^{(p_1)} + \{\tilde{y}\},$$

где $p_1 \leq 0(\tilde{y}) = p_1^h$. Можно убедиться в том, что в точности выполнено (см. [4], доказательство теоремы 2)

$$(11) \quad \begin{aligned} \tilde{D}^{(p_1)} &= \{g_i^{(j)} (i = 1, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots), U\}/U = \\ &= \{g_i^{(j)} (i = 1, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots), x_r\}/U. \end{aligned}$$

Итак, если $y \in \Gamma^{(p_1)}(G; B)$ — такой элемент, что $\tilde{y} = y + U$, то из (11) и (10) уже следует равенство

$$\Gamma^{(p_1)}(G; B)/U = \{g_i^{(j)} (i = 1, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots), x_r, y\}/U,$$

или, также равенство

$$(12) \quad \Gamma^{(p_1)}(G; B) = \{g_i^{(j)} (i = 1, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots), x_r, y\}.$$

Так как $0(\tilde{y}) = p_1^h$, то $p_1^h y \in U$, или,

$$(13) \quad y = \frac{1}{p_1^h} (b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_r x_r),$$

где $b_i (i = 1, 2, \dots, r)$ — целые рациональные числа. Если положим

$$b = b_r - \sum_{i=1}^{r-1} b_i a_i^{(h)},$$

то из (13) и (8) следует соотношение

$$y - \sum_{i=1}^{r-1} b_i g_i^{(h)} = \frac{b}{p_1^h} x_r \in \Gamma^{(p_1)}(G; B);$$

следовательно, в силу (12) можно писать

$$(14) \quad \Gamma^{(p_1)}(G; B) = \left\{ g_i^{(j)} (i = 1, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots), \frac{b}{p_1^h} x_r, x_r \right\}.$$

Пусть $b = p_1^k b'$, где $k \geq 0$ и $(b', p_1) = 1$. Тогда должно быть $k < h$, так как в противном случае можно было бы писать вместо (14)

$$\Gamma^{(p_1)}(G; B) = \{g_i^{(j)} (i = 1, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots), x_r\},$$

или, по (11), $\tilde{G}^{(p_1)} = \tilde{D}^{(p_1)}$, и это противоречит соотношению (10), где $\{\tilde{y}\} \neq (0)$. Итак, если положим $m = h - k$, то по (14) имеем

$$(15) \quad \Gamma^{(p_1)}(G; B) = \left\{ g_i^{(j)} (i = 1, \dots, r-1; j = 1, 2, \dots), \frac{1}{p_1^m} x_r \right\}.$$

Из формул (15) и (8) можно легко вывести, что в качестве p_1 -матрицы p_1 -примитивной подгруппы $\Gamma^{(p_1)}(G; B)$ можно взять матрицу $\mathfrak{M}_1^{(p_1)}$ вида

$$(16) \quad \mathfrak{M}_1^{(p_1)} = \begin{pmatrix} \wp_\infty(p_1), 0, & \dots, 0, & \alpha_1(p_1) \\ 0, \wp_\infty(p_1), & \dots, 0, & \alpha_2(p_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, 0, & \dots, \wp_\infty(p_1), & \alpha_{r-1}(p_1) \\ 0, 0, & \dots, 0, & \wp_m(p_1) \end{pmatrix}.$$

Необходимо будет $m > n$, так как в другом случае из формул (15) и (9) следовало бы соотношение $\Gamma^{(p_1)}(G; B) \subseteq \Gamma^{(p_1)}(H; B)$, или, равенство $\Gamma^{(p_1)}(G; B) = \Gamma^{(p_1)}(H; B)$, и это противоречит формуле (6).

Из равенств (5) и из того факта, что (2) служит системой p -матриц группы H относительно базиса B , следует, что для каждого $p_i (i = 2, 3, \dots)$ p_i -матрица $\mathfrak{M}_i^{(p_i)}$ является p_i -матрицей подгруппы $\Gamma^{(p_i)}(G; B)$. Итак, если положим $\mathfrak{M}_i^{(p_i)} = \mathfrak{M}^{(p_i)} (i = 2, 3, \dots)$ и если $\mathfrak{M}_1^{(p_1)}$ — матрица (16), то система матриц

$$(17) \quad [\mathfrak{M}_1^{(p_1)}, \mathfrak{M}_1^{(p_2)}, \dots, \mathfrak{M}_1^{(p_i)}, \dots]$$

служит системой p -матриц для группы G относительно базиса B .

Теперь положим $t = m - n$ и напомним, что для каждого $i (i = 2, 3, \dots)$ числа p_1^t и p_1^{-t} являются целыми p_i -адическими числами, значит, p_1^t является регулярным целым p_i -адическим числом. Далее, обозначим

$$B' = (p_1^t x_1, p_1^t x_2, \dots, p_1^t x_{r-1}, x_r)$$

и кроме того

$$B^* = (p_1^t x_1, p_1^t x_2, \dots, p_1^t x_{r-1}, p_1^t x_r).$$

Как было доказано в [3] (см. [3], § 8, преобразование типа 3)), если $\mathfrak{M}^{(p_1)}$ — p_1 -матрица p_1 -примитивной подгруппы $\Gamma^{(p_1)}(H; B)$, то p_1 -матрица

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(p_1)} = \begin{pmatrix} \wp_\infty(p_1), 0, & \dots, 0, & p_1^t \alpha_1(p_1) \\ 0, \wp_\infty(p_1), & \dots, 0, & p_1^t \alpha_2(p_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, 0, & \dots, \wp_\infty(p_1), & p_1^t \alpha_{r-1}(p_1) \\ 0, 0, & \dots, 0, & \wp_n(p_1) \end{pmatrix}$$

является p_1 -матрицей подгруппы $\Gamma^{(p_1)}(H; B')$, и по тем же причинам (применяем формулы для преобразований из [3] к базисам B' и B^* и к p_1 -матрице $\mathfrak{M}^{(p_1)}$) служит матрица

$$\mathfrak{M}_*^{(p_1)} = \begin{pmatrix} \wp_\infty(p_1), 0, & \dots, 0, & \alpha_1(p_1) \\ 0, & \wp_\infty(p_1), \dots, 0, & \alpha_2(p_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, \wp_\infty(p_1), \alpha_{r-1}(p_1) \\ 0, & 0, & \dots, 0, & \wp_{n+t}(p_1) \end{pmatrix}$$

p_1 -матрицей для p_1 -примитивной подгруппы $\Gamma^{(p_1)}(H; B^*)$ группы H . Так как $n + t = m$, то $\mathfrak{M}_*^{(p_1)} = \mathfrak{M}_1^{(p_1)}$ (см. 16), значит, мы этим доказали, что $\mathfrak{M}_1^{(p_1)}$ является p_1 -матрицей подгруппы $\Gamma^{(p_1)}(H; B^*)$.

Пусть теперь i – некоторое из чисел $2, 3, \dots$. Так как $\mathfrak{M}^{(p_i)}$ является по предположению p_i -матрицей p_i -примитивной подгруппы $\Gamma^{(p_i)}(H; B)$, то по [3] (см. [3], § 8, преобразование типа 3)) p_i -матрица $\mathfrak{M}_*^{(p_i)}$, которая возникла из $\mathfrak{M}^{(p_i)}$ умножением всех столбцов на регулярное целое p_i -адическое число p_1^{-t} , служит p_i -матрицей подгруппы $\Gamma^{(p_i)}(H; B^*)$. Но если умножим все строки матрицы $\mathfrak{M}_*^{(p_i)}$ на регулярное целое p_i -адическое число p_1^t , то получим опять p_i -матрицу $\mathfrak{M}^{(p_i)}$, которая должна быть по [3] (см. [3], § 6, преобразование α) p_i -матрицей подгруппы $\Gamma^{(p_i)}(H; B^*)$. Так как $\mathfrak{M}^{(p_i)} = \mathfrak{M}_1^{(p_i)}$ ($i = 2, 3, \dots$), то этим полностью доказано, что (17) является системой p -матриц для группы H относительно базиса B^* .

Система (17) служит системой p -матриц для группы G относительно базиса B и одновременно для группы H относительно базиса B^* , значит, группы G и H изоморфны.

Замечание. В доказательстве предшествующей теоремы можно было не пользоваться теоремой 6 из [3], так как если (17) служит системой p -матриц для группы G (относительно некоторого её базиса) и одновременно для группы H (относительно некоторого базиса), то эти группы обладают системами образующих, удовлетворяющих тем же соотношениям.

Теорема 2. Пусть G – группа без кручения конечного ранга, являющаяся VP -группой, и пусть H – подгруппа конечного индекса в G . Тогда $G \cong H$.

Доказательство. Теорему докажем полной индукцией по длине композиционного ряда конечной группы G/H , пользуясь теоремой 1.

Определение. Если G и H – группы без кручения конечного ранга, то они называются квази-изоморфными, если в G существует подгруппа G' конечного индекса такая, что $G' \cong H$ (см. [1]).

Замечание. Из теоремы 2.4 из [2] следует, что для групп без кручения конечного ранга совпадает только-что определенное понятие квази-изоморфизма с понятием почти-изоморфизма, введенным Б. Йонссоном в [2].

Теорема 3. Пусть G и H — группы без кручения конечного ранга. Если одна из этих групп является BP -группой, то эти группы квази-изоморфны в точности тогда, когда они изоморфны.

Доказательство. Теорема является простым следствием теоремы 2 и определения квази-изоморфизма.

Группа без кручения конечного ранга называется слабо разложимой, если она квази-изоморфна некоторой группе, разложимой в прямую сумму; если такая группа не является слабо разложимой, то она называется строго неразложимой.

Следствие. Пусть G — группа без кручения конечного ранга, являющаяся BP -группой. Группа G строго неразложима в точности тогда, когда она неразложима в прямую сумму.

Так как существуют в прямую сумму неразложимые BP -группы произвольного конечного ранга (см. [4], теорема 10), то существуют строго неразложимые группы без кручения произвольного конечного ранга.

Замечание. Если ослабим условия, накладываемые на BP -группу, чтобы для каждого простого числа p имело место неравенство $r_p(G) \geq r - 1$ (см. лемму 1), то теорема 3 не будет больше справедливой, как показывает пример:

Пусть p_1, p_2, p_3, \dots — последовательность всех простых чисел, пусть $\chi_1 = (0, 0, \infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$, $\chi_2 = (0, \infty, 0, \infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$ — две характеристики, и пусть J_1, J_2 — такие группы без кручения ранга 1, что существуют элементы $x_i \in J_i$, обладающие в J_i характеристикой χ_i ($i = 1, 2$). Если положим $H = J_1 \dot{+} J_2$ и $G = \{H, y\}$, где $p_1 y = x_1 + x_2$, то можно доказать, что группа G неразложима в прямую сумму. Это значит, что группы G, H неизоморфны, но квази-изоморфны, так как $G/H \cong \mathcal{C}(p_1)$. Притом $r_{p_i}(H) \geq 1 = r - 1$ ($i = 2, 3, \dots$) и $r_{p_1}(H) = 0 = r - 2$.

Литература

- [1] R. A. Beaumont and R. S. Pierce: Torsion free groups of rank two, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 1961.
- [2] B. Jónsson: On direct decomposition of torsion free abelian groups, *Math. Scand.*, 7, 1959, 361—371.
- [3] А. Мальцев: Абелевы группы конечного ранга без кручения, *Мат. сб.* 4 (46), 1938, 45—68.
- [4] Л. Прохазка: О p -ранге абелевых групп без кручения конечного ранга, *Чехослов. мат. ж.*, 12 (87), 1962, 3—43.

Summary

A NOTE ON QUASI-ISOMORPHISM OF TORSION FREE ABELIAN GROUPS OF FINITE RANK

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

By a group we understand always a torsion free abelian group of finite rank. If G is such a group, then $r_p(G)$ denotes the p -rank of G (see [4], definition 3), p being a prime. A group G of rank r is said to be a *BP*-group if $r_p(G) \geq r - 1$ for every prime p . According to [1] two groups G and H are called quasi-isomorphic if there exists a subgroup $G' \subseteq G$ such that $G' \cong H$ and G' is of finite index in G . Using these concepts the following theorem is proved:

Theorem 3. *Let G, H be two groups, G a BP-group. Then G and H are quasi-isomorphic if and only if they are isomorphic.*