Czechoslovak Mathematical Journal

Miloš Ráb

Note sur les formules asymptotiques pour les solutions d'un système d'équations différentielles linéaires

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 1, 127–129

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100716

NOTE SUR LES FORMULES ASYMPTOTIQUES POUR LES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

M. RÁB, Brno

(Reçu le 30. mars 1965)

Dans l'article [1], j'ai établi le théorème suivant:
Soit

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)]\mathbf{x} \tag{1}$$

un système des équations linéaires, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *étant des matrices carrées d'ordre n dont les éléments sont fonctions continues dans l'intervalle* $J = \langle t_0, \infty)$. *Soit* $\mathbf{Y}(t)$ *une matrice fondamentale des solutions du système*

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}\ , \tag{2}$$

$\mathbf{Y}^{-1}(t)$ *la matrice inverse et supposons que l'on ait*

$$\int_{t_0}^{\infty} \|\mathbf{Y}^{-1}(t)\, \mathbf{B}(t)\, \mathbf{Y}(t)\|\, \mathrm{d}t < \infty\ . \tag{3}$$ [1])

Alors toute solution du système (1) (*en excluant la solution triviale*) *possède la forme*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t)\,[\mathbf{c} + \mathbf{o}(1)] \tag{4}$$

ou $\mathbf{c}$ *signifie un n-vecteur,* $\mathbf{c} \neq \mathbf{O}$.

Le but de cette Note est de déduire la formule pour le vecteur $\mathbf{o}(1)$ dans (4). Une estimation a été établie dans [2], p. 208, mais on peut déduire facilement par la méthode de G. PEANO [3] et H. F. BAKER [4] des formules beaucoup plus précises.

[1]) Sous la norme $\| \ \|$ d'une matrice on entend la somme des valeurs absolues de tous les éléments de cette matrice.

A cet effet, posons $\mathbf{x} = \mathbf{Y}\mathbf{u}$. On voit immédiatement que le vecteur $\mathbf{u}$ satisfait au système

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{u}\,, \quad \mathbf{C}(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t)\,\mathbf{B}(t)\,\mathbf{Y}(t)\,. \tag{5}$$

Soit

$$\mathbf{R}^0(t) = \begin{pmatrix} 1, 0, \ldots . 0 \\ 0, 1, \ldots, 0 \\ \ldots . \\ 0, 0, \ldots, 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}^n(t) = \int_t^\infty \mathbf{C}(s)\,\mathbf{R}^{n-1}(s)\,\mathrm{d}s\,, \quad t \geqq t_0\,. \tag{6}$$

Nous allons démontrer que la série

$$\mathbf{u}(t) = \sum_0^\infty (-1)^n\,\mathbf{R}^n(t)\,\mathbf{c}\,, \tag{7}$$

ou $\mathbf{c}$ signifie un n-vecteur constant, converge uniformément dans l'intervalle J et représente la solution de (5).

En effet, si nous posons

$$\int_t^\infty \|\mathbf{C}(s)\|\,\mathrm{d}s = \varepsilon(t)\,,$$

on a évidemment $\|\mathbf{R}^1(t)\| \leqq \varepsilon(t)$ et $\varepsilon(t) \to 0$ pour $t \to \infty$. Nous allons démontrer par récurrence

$$\|\mathbf{R}^n(t)\| \leqq \frac{\varepsilon^n(t)}{n!}\,.$$

En supposant la validité de cette inégalité, nous obtenons

$$\|\mathbf{R}^{n+1}(t)\| \leqq \int_t^\infty \|\mathbf{C}(s)\|\,\|\mathbf{R}^n(s)\|\,\mathrm{d}s \leqq -\int_t^\infty \varepsilon'(s)\,\frac{\varepsilon^n(s)}{n!}\,\mathrm{d}s = \frac{\varepsilon^{n+1}(t)}{(n+1)!}\,.$$

La série $\sum_0^\infty \varepsilon^n(t)/n! = \exp\{\varepsilon(t)\}$ étant convergente pour chaque $t \in J$ et $\varepsilon(t)$ étant borné dans cet intervalle, il en résulte la convergence uniforme de (7).

Maintenant, on vérifie facilement que cette série représente une solution du système (5). En effet, en raison de la relation $[\mathbf{R}^n(t)]' = -\mathbf{C}(t)\,\mathbf{R}^{n-1}(t)$ on a

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_0^\infty (-1)^n\,\mathbf{R}^n(t)\,\mathbf{c} = \sum_0^\infty (-1)^n\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{R}^n(t)\,\mathbf{c} =$$

$$= \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\,\mathbf{C}(t)\,\mathbf{R}^{n-1}(t)\,\mathbf{c} = \mathbf{C}(t)\sum_0^\infty (-1)^n\,\mathbf{R}^n(t)\,\mathbf{c} = \mathbf{C}(t)\mathbf{u}\,.$$

Nous venons de démontrer ainsi le théorème suivant:

Sous les hypothèses du théorème cité ci-dessus, toute solution de (1) *est de la forme*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t) \sum_0^\infty (-1)^n \mathbf{R}^n(t)\, \mathbf{c}\,,$$

$\mathbf{c}$ *étant un vecteur constant convenablement choisi et* $\mathbf{R}^n(t)$ *étant définie par les formules* (6).

Remarque. Toute solution du système (5) vérifie, sous le les hypothèses du théorème, l'inégalité suivante

$$(8) \qquad \left\| \mathbf{u}(t) - \sum_0^n (-1)^n \mathbf{R}^n(t)\, \mathbf{c} \right\| \leqq \|\mathbf{c}\| \frac{\varepsilon^{n+1}(t)}{(n+1)!} \exp\{\varepsilon(t)\}\,.$$

Pour $n = 0$ on obtient le résultat établi dans [2].

Bibliographie

[1] *M. Ráb:* Über lineare Perturbationen eines Systems von linearen Differentialgleichungen, Czechoslovak Math. J. *8* (*83*) (1958), 222—229.

[2] *M. Ráb:* Asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + q(x)\, y = 0$, ibid. *14* (*89*) (1964), 203—221.

[3] *G. Peano:* Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., *22* (1887), 293—302.

[4] *H. F. Baker:* On the integration of linear differential equations, Proc. London Math. Soc. *35* (1903), 333—378.

Adresse de l'auteur: Brno, Janáčkovo nám. 2a, ČSSR (Přírodovědecká fakulta University J. E. Purkyně).

ЗАМЕТКА К АСИМПТОТИЧЕСКИМ ФОРМУЛАМ ДЛЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МИЛОШ РАБ (Miloš Ráb), Брно

Пусть, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ — квадратные матрицы порядка n, элементы которых являются непрерывными функциами в интервале $\langle t_0, \infty)$. Пусть $\mathbf{Y}$-фундаментальная матрица решений системы (2), $\mathbf{Y}^{-1}$-обратная матрица, и пусть выполнено (3). Тогда каждое решение системы (1) можно писать в форме $\mathbf{x} = \mathbf{Y}\mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ определяется формулами (6), (7). Функция $\mathbf{u}$ уловлетворяет неравенствам (8).