

Marko Švec

Les propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle nonlinéaire d'ordre  $n$

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 17 (1967), No. 4, 550–557

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100802>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

LES PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NONLINÉAIRE D'ORDRE  $n$

MARKO ŠVEC, Bratislava

(Reçu le 7 juillet 1966)

Soit  $S_{n-1}$  l'espace de Banach de toutes les fonctions définies sur l'intervalle  $J = \langle x_0, \infty \rangle$  et ayant sur cet intervalle la dérivée d'ordre  $n - 1$  continue et bornée. Soit  $\|f(x)\| = \sup_J |f^{(n-1)}(x)| + \sum_{i=0}^{n-2} |f^{(i)}(x_0)|$  la norme dans  $S_{n-1}$ .

**Théorème 1.** Soit  $B(x, \mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ ,  $n \geq 1$ , une fonction continue sur le domaine

$$\Omega : a < x < \infty, \quad -\infty < u_i < \infty, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Soit  $F(x)$  une fonction continue sur  $(a, \infty)$  et telle que

$$(1) \quad |B(x, \mathbf{u})| \leq F(x) \quad \text{pour tout point } (x, \mathbf{u}) \in \Omega,$$

$$(2) \quad \int_{x_0}^{\infty} x^{n-1} F(x) dx < \infty.$$

Soient enfin  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  des nombres réels arbitraires. Alors l'équation

$$(E) \quad y^{(n)} + B(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

a une solution  $u(x)$ , définie au moins sur l'intervalle  $J = \langle x_0, \infty \rangle$ ,  $x_0 > a$ , telle que

$$(4) \quad u^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^{k-i}}{(k - i)!} + o(1), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Démonstration. Soit  $x_0 > a$  et soit  $f(x) \in S_{n-1}$  arbitraire. D'après (1) nous avons  $|B(x, \mathbf{f}(x))| \leq F(x)$ , où  $\mathbf{f}(x) = (f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x))$ , pour tout  $x \in J$ . Donc, en utilisant (2), nous obtenons que

$$\left| \int_{x_0}^{\infty} x^{n-1} B(x, \mathbf{f}(x)) dx \right| \leq \int_{x_0}^{\infty} x^{n-1} F(x) dx < \infty.$$

Définissons sur  $S_{n-1}$  l'opérateur  $T$  de la manière suivante: Si  $f(x) \in S_{n-1}$ , soit

$$(5) \quad v(x) = Tf(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{(x-x_0)^k}{k!} + \int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, f(t)) dt.$$

On voit immédiatement que  $v(x)$  est une fonction continue ayant sur  $J$  les dérivées continues jusqu'à l'ordre  $n$  inclus, données par les formules:

$$(6) \quad v^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x-x_0)^{k-i}}{(k-i)!} + \int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, f(t)) dt, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$v^{(n)}(x) = -B(x, f(x)),$$

et que tout point invariant de  $T$  est une solution de l'équation (E) satisfaisant aux conditions (4). Nous allons prouver l'existence d'un tel point invariant de  $T$ .

Posons

$$(7) \quad \int_{x_0}^{\infty} (t-x_0+1)^{n-1} F(t) dt = A.$$

Alors, de (6), en respectant (7), nous obtenons

$$(8) \quad |v^{(i)}(x_0)| = \left| c_i + \int_{x_0}^{\infty} \frac{(x_0-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, f(t)) dt \right| =$$

$$\leq |c_i| + \int_{x_0}^{\infty} (t-x_0+1)^{n-1} F(t) dt = |c_i| + A, \quad i = 0, 1, \dots, n-2,$$

$$|v^{(n-1)}(x)| = \left| c_{n-1} + \int_x^{\infty} B(t, f(t)) dt \right| \leq |c_{n-1}| + A.$$

Cela signifie que  $v(x) \in S_{n-1}$  et que

$$(9) \quad \|v(x)\| = \|Tf(x)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + nA = L.$$

Donc  $TS_{n-1}$  fait partie de la boule fermée

$$(10) \quad M = \{f(x) \in S_{n-1} \mid \|f(x)\| \leq L\}.$$

C'est pourquoi nous pouvons affirmer que  $TM \subset M$ .

Maintenant nous démontrons la continuité de  $T$ . Soient  $f_k(x)$ ,  $f(x) \in S_{n-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  et soit  $\|f_k(x) - f(x)\| \rightarrow 0$  pour  $k \rightarrow \infty$ . On démontre facilement que alors  $f_k^{(i)}(x)$  converge vers  $f^{(i)}(x)$  pour  $k \rightarrow \infty$ . La fonction  $B(x, \mathbf{u})$  étant continue sur  $\Omega$  nous obtenons que  $B(x, \mathbf{f}_k(x))$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , sont les fonctions continues sur  $J$  et

convergent vers  $B(x, \mathbf{f}(x))$  pour tout  $x \in J$ . L'application du théorème de Lebesgue sur

$$\|Tf_k(x) - Tf(x)\| = \sup_J \left| \int_x^\infty [B(t, \mathbf{f}_k(t)) - B(t, \mathbf{f}(t))] dt \right| + \sum_{i=0}^{n-2} \left| \int_{x_0}^\infty \frac{(x_0 - t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} [B(t, \mathbf{f}_k(t)) - B(t, \mathbf{f}(t))] dt \right|$$

donne la preuve de la continuité de  $T$ .

Il reste à prouver que  $TM$  est compact. Soit  $\{v_k(x)\}$  une suite arbitraire de  $TM$ . Considérons tout d'abord l'ensemble des fonctions  $v_k^{(n-1)}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . D'après (6), on a

$$|v_k^{(n-1)}(x)| \leq |c_{n-1}| + \left| \int_x^\infty B(t, \mathbf{f}_k(t)) dt \right|,$$

d'où, en respectant (1), nous avons

$$(11) \quad |v_k^{(n-1)}(x)| \leq |c_{n-1}| + \int_x^\infty F(t) dt \leq |c_{n-1}| + \int_{x_0}^\infty F(t) dt.$$

Cela signifie d'une part que les fonctions  $v_k^{(n-1)}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , sont uniformément bornées par le nombre  $|c_{n-1}| + \int_{x_0}^\infty F(t) dt$  et d'autre part qu'elles sont équicontinues. Cette dernière affirmation découle de (11) et du fait que  $\int_x^\infty F(t) dt < \infty$ . Alors, d'après le théorème d'Arzelà, l'ensemble des fonctions  $v_k^{(n-1)}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , est compact sur l'intervalle  $\langle x_0, x_1 \rangle$  au sens de la norme  $\|v_k^{(n-1)}(x)\| = \sup_{\langle x_0, x_1 \rangle} |v_k^{(n-1)}(x)|$ .

Quant à  $x_1$ , nous le choisissons de la manière suivante: Soit  $\varepsilon > 0$  un nombre arbitraire. Alors il existe un nombre  $x_1$  tel que  $\int_x^\infty F(t) dt < \varepsilon/2$  pour tout  $x \geq x_1$ . L'ensemble des fonctions  $v_k^{(n-1)}(x)$  étant compact sur  $\langle x_0, x_1 \rangle$ , il existe pour tout  $\varepsilon > 0$ , d'après le théorème d'Hausdorff, un  $\varepsilon$ -filet fini  $v_{\alpha_1}^{(n-1)}(x), v_{\alpha_2}^{(n-1)}(x), \dots, v_{\alpha_N}^{(n-1)}(x)$  tel que pour toute fonction  $v^{(n-1)}(x)$  de la suite  $\{v_k^{(n-1)}(x)\}$  il existe un entier  $\alpha_s$  parmi les entiers  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  tel que  $\sup_{\langle x_0, x_1 \rangle} |v^{(n-1)}(x) - v_{\alpha_s}^{(n-1)}(x)| < \varepsilon$ . Mais pour  $x \geq x_1$  nous avons

$$|v^{(n-1)}(x) - v_{\alpha_s}^{(n-1)}(x)| \leq \int_x^\infty |B(t, \mathbf{f}(t)) - B(t, \mathbf{f}_{\alpha_s}(t))| dt \leq 2 \int_x^\infty F(t) dt < \varepsilon,$$

où  $v(x) = Tf(x)$ ,  $v_k(x) = Tf_k(x)$ . Cela signifie que  $v_{\alpha_1}^{(n-1)}(x), v_{\alpha_2}^{(n-1)}(x), \dots, v_{\alpha_N}^{(n-1)}(x)$  est un  $\varepsilon$ -filet fini pour les fonctions  $v_k^{(n-1)}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  aussi sur l'intervalle  $J$ . Donc l'ensemble des fonctions  $v_k^{(n-1)}(x)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , est compact sur  $J$  au sens de la norme  $\|v_k^{(n-1)}(x)\| = \sup_J |v_k^{(n-1)}(x)|$ . Il en résulte que nous pouvons extraire de chaque suite  $\{v_j(x)\}$  des fonctions de  $TM$  une sous-suite  $\{v_{k_j}(x)\}$  telle que la suite  $\{v_{k_j}^{(n-1)}(x)\}$  converge vers une fonction  $\varphi(x)$  au sens de  $\sup_J |v_{k_j}^{(n-1)}(x) - \varphi(x)| \rightarrow 0$  pour  $k_j \rightarrow \infty$ . La fonction  $\varphi(x)$  est continue et bornée sur  $J$ . Les fonc-

tions  $v_{k_j}(x)$  étant de  $M$ , on a  $\|v_{k_j}(x)\| \leq L$ , d'où il résulte que les suites  $\{v_{k_j}^{(i)}(x_0)\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 2$ , sont bornées par  $L$ . On peut alors extraire la sous-suite  $\{v_{k_j}(x)\}$  de telle façon que  $\lim_{k_j \rightarrow \infty} v_{k_j}^{(i)}(x_0) = a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 2$ , et  $\limsup_{k_j \rightarrow \infty} |v_{k_j}^{(n-1)}(x) - \varphi(x)| = 0$ . En construisant la fonction

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^{n-2}}{(n - 2)!} \varphi(t) dt,$$

on voit que  $g(x) \in S_{n-1}$  et  $\|v_{k_j}(x) - g(x)\| \rightarrow 0$  pour  $k_j \rightarrow \infty$ . Alors  $TM$  est compact au sens de la norme dans  $S_{n-1}$ .

Nous avons démontré que  $T$  est un opérateur continu sur  $S_{n-1}$  qui applique la boule fermée  $M$  de telle sorte que  $TM \subset M$  et  $TM$  est compact. D'après le théorème de Schauder  $T$  a au moins un point invariant, notons-le  $u(x)$ , dans  $M$ . Pour ce point sont valables les relations suivantes:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^k}{k!} + \int_x^\infty \frac{(x - t)^{n-1}}{(n - 1)!} B(t, u(t)) dt,$$

$$u^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x - x_0)^{k-i}}{(k - i)!} + \int_x^\infty \frac{(x - t)^{n-i-1}}{(n - i - 1)!} B(t, u(t)) dt,$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

De cela, en respectant (1) et (2), l'affirmation du théorème est évidente.

Les théorèmes suivants donnent certaines généralisations de ce théorème.

**Théorème 2.** Soient  $F(x, \mathbf{u})$  et  $B(x, \mathbf{u})$  les fonctions continues sur le domaine  $\Omega$ . Soit  $F(x, \mathbf{u})$  une fonction non-décroissante en chacune de ses variables  $u_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ . Soit  $K$  un nombre positif,  $x_0 > a$  et soit

$$(12) \quad \varphi(x) = K \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{s!} (x - x_0)^s,$$

$$(13) \quad \int_{x_0}^\infty x^{n-1} F(x, \varphi(x)) dx < \infty, \text{ pour chaque } K,$$

$$(14) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \int_{x_0}^\infty (x - x_0 + 1)^{n-1} F(x, \varphi(x)) dx = 0.$$

Soit encore

$$(15) \quad |B(x, \mathbf{u})| \leq F(x, \mathbf{u})$$

pour tout point  $(x, \mathbf{u}) \in \Omega$ . Soient enfin  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  des nombres réels arbitraires. Alors l'équation (E) a une solution  $u(x)$ , définie au moins sur  $J = \langle x_0, \infty \rangle$  pour laquelle sont valables les formules (4).

Démonstration. Soit  $K$  un nombre positif et soit  $G_K = \{f(x) \in S_{n-1} \mid \|f(x)\| \leq K\}$ . On déduit facilement que pour  $f(x) \in G_K$  arbitraire on a

$$(16) \quad |f^{(i)}(x)| \leq \varphi^{(i)}(x), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

En respectant (15), la monotonie de  $F(x, \mathbf{u})$  et (13), nous obtenons

$$(17) \quad |B(x, \mathbf{f}(x))| \leq F(x, \mathbf{f}(x)) \leq F(x, \varphi(x)),$$

$$(18) \quad \left| \int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} B(t, \mathbf{f}(t)) dt \right| \leq \int_x^\infty \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} F(t, \varphi(t)) dt < \infty.$$

Ceci nous permet de définir l'opérateur  $T$  sur  $G_K$  par la formule (5). Pour les dérivées de  $v(x) = Tf(x)$  sont valables les formules (6), d'où, en tenant compte de (17) et (18), nous obtenons

$$(19) \quad \begin{aligned} |v^{(n-1)}(x)| &\leq |c_{n-1}| + \left| \int_x^\infty B(t, \mathbf{f}(t)) dt \right| \leq \\ &\leq |c_{n-1}| + \int_x^\infty (t-x_0+1)^{n-1} F(t, \varphi(t)) dt = |c_{n-1}| + A(K), \\ |v^{(i)}(x_0)| &\leq |c_i| + A(K), \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$(20) \quad A(K) = \int_{x_0}^\infty (t-x_0+1)^{n-1} F(t, \varphi(t)) dt.$$

Il s'ensuit de (19) que

$$(21) \quad \begin{aligned} \|v(x)\| = \|Tf(x)\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + n \int_{x_0}^\infty (t-x_0+1)^{n-1} F(t, \varphi(t)) dt = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + n A(K). \end{aligned}$$

En se servant de l'hypothèse (14), nous avons

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + n A(K)}{K} = 0.$$

Il existe alors un nombre  $K_0$  tel que

$$(22) \quad \sum_{i=0}^{n-1} c_i + n A(K_0) \leq K_0.$$

Envisageons maintenant au lieu de  $G_K$  la boule  $G_{K_0}$ . Les inégalités (21) et (22) donnent que  $TG_{K_0} \subset G_{K_0}$ .

Le reste de la démonstration est le même que celui de la démonstration du théorème précédent. Le rôle de la boule  $M$  joue maintenant la boule  $G_{K_0}$  et le rôle de la fonction  $F(t)$  la fonction  $F(t, \varphi_0(t))$ , où  $\varphi_0(t) = K_0 \sum_{s=0}^{n-1} (1/s!) (x - x_0)^s$ . La continuité de  $T$  se démontre sur la boule  $G_{K_0}$ .

La condition (14) sert pour assurer l'existence d'une boule  $G_{K_0}$  telle que l'opérateur  $T$  l'applique dans elle-même. Le nombre  $x_0$  peut être arbitraire dans  $(a, \infty)$ . Nous pouvons nous débarrasser de cette condition aux dépens de  $x_0$  qui ne sera plus si arbitraire.

**Théorème 3.** *Soient remplies toutes les conditions du théorème 2 à l'exception de la condition (14). Les nombres  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  étant arbitrairement choisis, il existe un nombre  $x_0 \in (a, \infty)$  tel que l'équation (E) possède une solution  $u(x)$ , définie au moins sur l'intervalle  $J = \langle x_0, \infty \rangle$ , pour laquelle sont valables les formules (4).*

*Démonstration.* Nous n'avons qu'à prouver l'existence d'une boule  $G_K$  telle que  $TG_K \subset G_K$ . Considérons l'inégalité (21). A cause de l'existence de l'intégrale  $\int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} F(t, \varphi(t)) dt$ , nous pouvons trouver un tel  $x_0$  et tel  $K_0$ , que

$$\|v(x)\| = \|Tf(x)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| + n \int_{x_0}^{\infty} (t - x_0 + 1)^{n-1} F(t, \varphi(t)) dt \leq K_0.$$

On voit que pour tout  $K_0 > \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|$ , il existetoujours un nombre  $x_0$  tel quel'inégalité précédente soit satisfaite. Alors  $TG_{K_0} \subset G_{K_0}$ .

Une autre modification du théorème 3 donne le théorème suivant.

**Théorème 4.** *Soit  $B(t, \mathbf{u})$  une fonction continue sur le domaine  $\Omega$ . Soit*

$$(23) \quad |B(x, \mathbf{u})| \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}(x) |u_i| + a_0(x) = F(x, \mathbf{u}),$$

pour  $(x, u) \in \Omega$  et  $a_{n-i}(x) \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$ . Soit

$$(24) \quad \int_{x_0}^{\infty} x^{2n-j-2} a_{n-j}(x) dx < \infty, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad \int_{x_0}^{\infty} x^{n-1} a_0(x) dx < \infty.$$

Soient  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  des nombres réels arbitraires. Alors il existe un nombre  $x_0 \in (a, \infty)$  tel que l'équation (E) a une solution  $u(x)$ , définie au moins sur  $J = \langle x_0, \infty \rangle$ , pour laquelle sont valables les formules (4).

Remarque 1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Si nous remplaçons la condition (2) dans le théorème 1 par

$$(2') \quad \int_{x_0}^{\infty} x^{n-1+\varepsilon} F(x) dx < \infty$$

et analogiquement la condition (13) dans les théorèmes 2 et 3 par

$$(13') \quad \int_0^{\infty} x^{n-1+\varepsilon} F(x, \varphi(x)) dx < \infty \quad \text{pour tout } K > 0,$$

et la condition (24) dans le théorème 4 par

$$(24') \quad \int_0^{\infty} x^{2n-j-2+\varepsilon} a_{n-j}(x) dx < \infty, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\int_0^{\infty} x^{n-1+\varepsilon} a_0(x) dx < \infty,$$

alors les formules (4) pour la solution  $u(x)$  de (E) seront

$$(4') \quad u^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x-x_0)^{k-i}}{(k-i)!} + o(x^{-\varepsilon}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

En effet, la solution  $u(x)$  et ses dérivées satisfont aux équations

$$u^{(i)}(x) = \sum_{k=i}^{n-1} c_k \frac{(x-x_0)^{k-i}}{(k-i)!} + \int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, u(t)) dt,$$

$$i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Nous avons à prouver que

$$\int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, u(t)) dt = o(x^{-\varepsilon}),$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\varepsilon} \int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, u(t)) dt = 0.$$

Mais nous avons

$$\left| x^{\varepsilon} \int_x^{\infty} \frac{(x-t)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} B(t, u(t)) dt \right| \leq \int_x^{\infty} \frac{x^{\varepsilon}(t-x)^{n-i-1}}{(n-i-1)!} |B(t, u(t))| dt \leq$$

$$\leq \int_x^{\infty} t^{\varepsilon} t^{n-i-1} |B(t, u(t))| dt = o(1)$$

en respectant (1) et (2') ou bien (15) et (13'), ou bien (23) et (24').

Cette dernière modification du théorème 4 appliquée à une équation différentielle linéaire donne les résultats de M. ZLÁMAL [1].



Remarque 2. Le problème de l'existence globale et les formules asymptotiques des solutions de l'équation (E) données par les conditions initiales sont discutées dans [2].

*Littérature*

- [1] Zlámal M.: Asymptotische Eigenschaften der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Nachrichten, B. 10, 1953, S. 169–174.
- [2] Švec M.: L'existence globale et les propriétés asymptotiques des solutions d'une équation différentielle non-linéaire d'ordre  $n$ . Archivum mathematicum (Brno), T. 2 (1966), 141–151.

*Adresse de l'auteur:* Bratislava, Gottwaldovo nám. 2, ČSSR (Slovenská vysoká škola technická).