Izu Vaisman

К геометрии многообразии флагов в симплектическом пространстве. II

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 1, 60–66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100875

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

К ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ФЛАГОВ В СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

IZU VAISMAN (Изу Вайсман), Iaşi

(Поступило в редакцию 5/VI. 1967 г.)

Настоящая работа является продолжением работы [1]. Поэтому мы используем те же определения и обозначения. Напомним, что в [1] были изложены необходимые общие сведения из симплектической геометрии, определение многообразия $F(Sp_{2n-1})$ флагов симплектического пространства Sp_{2n-1}, дифференциальная теория однопараметрических флаговых многообразий и общие соображения относительно k-параметрических флаговых многообразий. В настоящей работе мы построим дифференциальную теорию общих, k-параметрических флаговых многообразий проективно-симплектического пространства Sp_{2n-1} при $1 \leqq k < 2n - 1$. Окажется, что эта теория является прямым обобщением теории однопараметрических многообразий [1].

1. Учитываем проективно-симплектическое пространство Sp_{2n-1}. Известно [1], что флаг этого пространства есть совокупность вида

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq \ldots \subseteq P_{2n-1} = Sp_{2n-1}\,, \tag{1}$$

где P_h неособые плоскости. Флаг однозначно определяется его *центрами* A_α и *осями* d_α ($\alpha = 1, \ldots, n$) (они являются попарно сопряженными неособыми прямыми, и d_α проходит через A_α). *Ассоциированные реперы* флага – это симплектические реперы $\{A_\alpha, B_\alpha\}$, где $B_\alpha \in d_\alpha$. Тогда мы имеем

$$\begin{gathered} P_{2h-2} = \{A_1, \ldots, A_h, B_1, \ldots, B_{h-1}\}\,, \\ P_{2h-1} = \{A_1, \ldots, A_h, B_1, \ldots, B_h\} \quad (h = 1, \ldots, n)\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Многообразие флагов пространств Sp_{2n-1} отождествляется с однородным пространством

$$F(Sp_{2n-1}) = GSp_{2n-1}/G_0\,, \tag{3}$$

где GSp_{2n-1} – симплектическая группа и G_0 ее подгруппа, определенная матрицами вида [1]

$$(4)\qquad \begin{pmatrix} \varrho_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & \varrho_n & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \dots & 0 & 1/\varrho_1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & \lambda_n & 0 & \dots & 1/\varrho_n \end{pmatrix}.$$

Это многообразие имеет $n(2n-1)$ измерений, и k-параметрическое флаговое многообразие — это k-мерное подмногообразие в $F(Sp_{2n-1})$.

Пусть VF_k такое k-параметрическое многообразие флагов $\{F\}$, центры которых нормированы инвариантным образом. Для его изучения мы возьмем [1] семейство ассоциированных реперов к флагам F, $\{A_\sigma, B_\sigma\}$. Уравнения движения этих реперов суть [1]

$$(5)\qquad \mathrm{d}A_\sigma = \omega_\sigma^\tau A_\tau + \varpi_\sigma^\tau B_\tau\,, \quad \mathrm{d}B_\sigma = \vartheta_\sigma^\tau A_\tau + \eta_\sigma^\tau B_\tau\,, \quad (\sigma, \tau = 1, \dots, n)\,,$$

где пфаффовы формы ω, ϖ, ϑ, η удовлетворяют условиям

$$(6)\qquad \varpi_\sigma^\tau = \varpi_\tau^\sigma\,, \quad \vartheta_\sigma^\tau = \vartheta_\tau^\sigma\,, \quad \omega_\sigma^\tau + \eta_\tau^\sigma = 0\,,$$

а уравнения структуры суть

$$(7)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}\omega_\sigma^\lambda &= \omega_\sigma^\tau \wedge \omega_\tau^\lambda + \varpi_\sigma^\tau \wedge \vartheta_\tau^\lambda\,, \\ \mathrm{d}\varpi_\sigma^\tau &= \omega_\sigma^\tau \wedge \varpi_\tau^\lambda + \varpi_\sigma^\tau \wedge \eta_\tau^\lambda\,, \\ \mathrm{d}\vartheta_\sigma^\lambda &= \vartheta_\sigma^\tau \wedge \omega_\tau^\lambda + \eta_\sigma^\tau \wedge \vartheta_\tau^\lambda\,. \end{aligned}$$

Переход к другому семейству ассоциированных реперов дается формулами [1]

$$(8)\qquad \tilde{A}_\sigma = A_\sigma\,, \quad \tilde{B}_\sigma = \lambda_\sigma A_\sigma + B_\sigma\,, \quad (\sigma = 1, \dots, n)\,,$$

при которых найдется

$$(9)\qquad \begin{aligned} \tilde{\omega}_\sigma^\tau &= \omega_\sigma^\tau - \lambda_\tau \varpi_\sigma^\tau\,, \\ \tilde{\varpi}_\sigma^\tau &= \varpi_\sigma^\tau\,, \\ \tilde{\vartheta}_\sigma^\tau &= \vartheta_\sigma^\tau + \lambda_\sigma \omega_\sigma^\tau + \lambda_\tau \omega_\tau^\sigma - \lambda_\sigma \lambda_\tau \varpi_\sigma^\tau + \delta_\sigma^\tau\, \mathrm{d}\lambda_\sigma\,. \end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что формы ϖ_σ^τ являются *инвариантными формами* многообразия VF_k. Они удовлетворяют первому условию (6), так что их число $n(n+1)/2$.

2. В дальнейшем мы будем предполагать, что выполняется условие

$$(10)\qquad 1 \leqq k < 2n - 1\,.$$

Также, раз на всегда, будем предполагать, что многообразие VF_k находится в таком общем положении, что все следующие рассуждения справедливы.

Тогда, так как $n(n + 1)/2 \geqq 2n - 1$, можно выбрать между инвариантными формами ϖ_σ^τ k независимых форм. Если обозначим выбранные формы через ω^i $(i = 1, \ldots, k)$, имеем

$$\varpi_\sigma^\tau = \Pi^\tau_{\sigma i}\omega^i\,, \quad \omega_\sigma^\tau = \Gamma^\tau_{\sigma i}\omega^i\,, \quad \vartheta_\sigma^\tau = \Theta^\tau_{\sigma i}\omega^i\,, \tag{11}$$

где $\Pi^\tau_{\sigma i}$ являются инвариантами многообразия VF_k (некоторые из них постоянны), а $\Gamma^\tau_{\sigma i}$ и $\Theta^\tau_{\sigma i}$ зависят также от ,,вторичных параметров“.

Дальше мы укажем, как можно выбрать инвариантным образом точки B_α ассоциированных реперов.

Пусть T_k^h – касательная плоскость к многообразию V_h, описанному центром A_h флагов многообразия VF_k, и $\overline{T}^h_{2n-k-2}$ – ее сопряженная плоскость; мы предполагаем, что эти плоскости являются неособыми. Если Q^h_{2n-2} есть сопряженная гиперплоскость центра A_h, то очевидно

$$\overline{T}^h_{2n-k-2} \subset Q^h_{2n-2}\,. \tag{12}$$

В дальнейшем, индекс центров, осей, точек B и индексы, определенные при их помощи, надо всегда заменять индексом, находящимся в последовательности $\{1, \ldots, n\}$ и конгруэнтным по модулю n с данным.

Пусть, во-первых, $k = 2m - 1$. Рассмотрим для каждого флага F из VF_k оси $d_{h-m}, \ldots, d_{h-1}$ $(h = 1, \ldots, n)$. Их объединение есть неособая $(2m - 1)$-плоскость R^h_{2m-1} $(h = 1, \ldots, n)$, все точки которой, очевидно, сопряжены с A_h, так что $R^h_{2m-1} \subset Q^h_{2n-2}$. Тогда, в общем случае, плоскости $\overline{T}^h_{2n-k-2}$ и R^h_{2m-1} пересекаются в одной точке C_{h-1}. Теперь спроектируем эту точку из сопряженной плоскости оси d_{h-1} на d_{h-1}. Это даст нам определенную точку оси d_{h-1}, которую мы выберем в качестве точки B_{h-1}.

Если $k = 2m$, заменим плоскость R^h_{2m-1} плоскостью $\tilde{R}^h_{2m}$, являющейся объединением между R^h_{2m-1} и A_h (или A_{h-m-1}), после чего точки B_{h-1} получаются как и выше.

Заметим еще, что в случае $k = 2m$ мы могли бы взять в качестве точки C_{h-1} из предыдущей конструкции полюс плоскости T_k^h [1], но это не очень удобно с аналитической точки зрения.

Конечно все предыдущие соображения невозможны в случае $k \geqq 2n - 1$.

Выразим теперь аналитические условия, которые следуют из предыдущего выбора точек B_h ассоциированных реперов.

В этих реперах произвольная точка пространства имеет вид

$$M = x^\sigma A_\sigma + y^\sigma B_\sigma\,, \tag{13}$$

так что уравнения плоскости $\overline{T}^h_{2m-k-2}$, которые получаются из

$$\langle A_h, M\rangle = 0\,, \quad \langle \mathrm{d}A_h, M\rangle = 0 \tag{14}$$

будут

$$(15)\qquad y^h = 0\,,\quad \sum_{\tau=1}^{n}(\Pi^\tau_{hi}x^\tau - \Gamma^\tau_{hi}y^\tau) = 0\,,\quad (h = 1, \dots, n;\ i = 1, \dots, k)\,.$$

Если $k = 2m - 1$, плоскость R^h_{2m-1} имеет уравнения

$$(16)\qquad x^\alpha = 0\,,\quad y^\alpha = 0\,,\quad (\alpha \bar{\in} [h - m, \dots, h - 1])$$

и для того, чтобы точка пересечения плоскостей (15) и (16) имела своей проекцией на d_{h-1} точку B_{h-1}, необходимо и достаточно условие

$$(17)\qquad \mathrm{Det}\,|\Pi^\tau_{hi}, \Gamma^\sigma_{hi}| = 0\,,\quad (\tau = h - m, \dots, h - 2,\ \sigma = h - m, \dots, h - 1)\,,$$

где первый член — определитель порядка $2m - 1$.

В случае $k = 2m$, плоскость $\tilde{R}^h_{2m}$ имеет уравнения

$$(18)\qquad x^\alpha = 0\ (\alpha \bar{\in} [h - m, \dots, h])\,,\quad y^\beta = 0\ (\beta \bar{\in} [h - m, \dots, h - 1])\,,$$

и условие (17) заменяется условием

$$(19)\qquad \mathrm{Det}\,|\Pi^\tau_{hi}, \Gamma^\sigma_{hi}| = 0\quad (\tau = h - m, \dots, h - 2, h;\ \sigma = h - m, \dots, h - 1)\,,$$

где в левой части имеется определитель порядка $2m$.

Предыдущая теория была построена при заданной нормализации центров флагов многообразия VF_k, но эта нормализация входила только в аналитические выражения. Ясно, что геометрические точки B_h не зависят от этой нормализации. Это дает нам возможность указать инвариантную нормализацию точек A_h.

Легко видеть, что изменение заданной нормализации точек A_h выражается формулами

$$(20)\qquad \bar{A}_h = \varrho_h A_h\,,\quad \bar{B}_h = \frac{1}{\varrho_h} B_h\quad \text{(не суммировать)}\,,$$

так что мы должны выбрать инвариантным образом функции ϱ_h.

Очевидно, что между многообразиями V_h, описанными точками A_h, существует естественное соответствие. Мы будем искать на многообразиях $V_1, \dots$ $\dots, V_{k-1}$ систему соответствующих кривых, род которых больше 1, т.е. касательные которых принадлежат абсолютному комплексу [2]. Заметим, что это имеет геометрический смысл потому, что порядок точек A_h является существенным [1]. Аналитически искомые кривые даются дифференциальными уравнениями

$$(21)\qquad \langle A_\sigma, \mathrm{d}A_\sigma \rangle = 0\,,\quad (\sigma = 1, \dots, k - 1)\,,$$

т.е.

$$(22)\qquad \bar{\omega}^\sigma_\sigma = 0\,,\quad (\sigma = 1, \dots, k - 1;\ \text{не суммировать})\,.$$

В общем случае эти уравнения определяют через каждую точку A_h на V_h ($h = 1, \ldots, n$) кривую C_h; мы скажем, что кривые C_h являются *особыми кривыми* многообразия VF_k, и обозначим через σ_h их симплектический инвариантный параметр [2].

Сейчас мы вводим следующее условие нормирования (см. и [1])

$$\left\langle B_h, \frac{\mathrm{d}B_h}{\mathrm{d}\sigma_h} \right\rangle = \operatorname{sign}\left(\left\langle B_h, \frac{\mathrm{d}B_h}{\mathrm{d}\sigma_h} \right\rangle \right), \tag{23}$$

которое в силу формул (20) определяет (до знака) функции ϱ_h.

При помощи уравнений (5) условия (23) станут

$$\vartheta_h^h = -\operatorname{sign}\left(\left\langle B_h, \frac{\mathrm{d}B_h}{\mathrm{d}\sigma_h} \right\rangle \right) \mathrm{d}\sigma_h \quad (\operatorname{mod} \bar{\omega}_\sigma^\sigma = 0,\ \sigma = 1, \ldots, k-1)\,. \tag{24}$$

Этим задача нахождения канонического репера для многообразия VF_k вполне решена. Полная система инвариантов есть система функций Π, Γ, Θ, определенных формулами (11) и выполняющих условия (17) (или (19)), (24), условия

$$\Pi_{\sigma i}^\tau = \Pi_{\tau i}^\sigma\,, \quad \Theta_{\sigma i}^\tau = \Theta_{\tau i}^\sigma\,, \tag{25}$$

которые следуют из (6), и условия интегрируемости, которые следуют из (7). Для получения этих последних условий обозначим

$$\mathrm{d}\omega^i = \tfrac{1}{2} A_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k\,, \quad (A_{jk}^i = -A_{kj}^i) \tag{26}$$

и введем эти обозначения и формулы (11) в (7). Конкретный расчет не представляет здесь интереса.

Сейчас, известным образом, можно сформулировать основную теорему определения многообразия VF_k при помощи ее полной системы инвариантов.

3. Также некоторые другие соображения, сделанные в [1] для однопараметрических многообразий, прямо переносятся на общий случай.

Так, вычисление отклонов от параллелизма Миллера для канонического репера многообразия VF_k вдоль кривых

$$\omega^1 = \ldots = \omega^{i-1} = \omega^{i+1} = \ldots = \omega^k = 0\,, \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{27}$$

дает [1]

$$\left| A_1, A_\sigma, B_1, \ldots, A_k, \hat{B}_k, \ldots, A_n, B_n, \frac{\partial A_\sigma}{\omega^i} \right| = \iota_\tau \Pi_{\sigma i}^\tau\,, \tag{28}$$

$$\left| A_1, A_\sigma, B_1, \ldots, \hat{A}_k, B_k, \ldots, A_n, B_n, \frac{\partial A_\sigma}{\omega^i} \right| = \iota_\tau \Gamma_{\sigma i}^\tau \ (\sigma \neq \tau)\,,$$

$$\left| A_1, B_\sigma, B_1, \ldots, \hat{A}_k, B_k, \ldots, A_n, B_n, \frac{\partial B_\sigma}{\omega^i} \right| = \iota_\tau \Theta^\tau_{\sigma i}\,,$$

где [1]

$$\iota_\tau = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad \tau < \sigma\,, \\ -1 & \text{для} \quad \tau \geqq \sigma\,. \end{cases}$$

Эти соотношения являются геометрическими истолкованиями инвариантов многообразия VF_k, а также и их исчезновения. Другие истолкования можно получить при помощи симплектического инварианта пар прямых, как это сделано в [1].

Для многообразий VF_k переносится еще определение связности плоскостей P_{2h-1} вдоль некоторой кривой. В силу формул (2) эта связность определяется операторами ковариантного дифференцирования

$$(29) \qquad {}_{(h)}\mathrm{d}A_\sigma = \sum_{k=1}^{h} (\omega^k_\sigma A_k + \overline{\omega}^k_\sigma B_k)\,,$$

$$\qquad {}_{(h)}\mathrm{d}B_\sigma = \sum_{k=1}^{h} (\vartheta^k_\sigma A_k + \eta^k_\sigma B_k)\,, \quad (\sigma = 1, \ldots, h)$$

и допускает различные соображения параллелизма [1].

С той же точки зрения займемся рассмотрением последовательности * [1]. Для многообразия VF_k эту последовательность можно определить как и в случае VF_1 [1], именно центры B_h и оси d_h определяют многообразие VF_k^*, о котором скажем, что оно получилось из VF_k при преобразовании *, а последовательность * получается повторным применением этого преобразования. Многообразие VF_k является *циклическим порядка* $n - 1$, если n-ый член его последовательности * совпадает с самим многообразием VF_k.

Установим условия, характеризующие циклические многообразия порядка 2. Для этого обозначим как и в [1] через D_h центры многообразия VF_k^{**}. Точка D_{h-1} получается проектированием на d_h точки пересечения плоскости (16) или (18) с сопряженной плоскостью касательной плоскости многообразия, описанного точкой B_h. Искомые условия для $k = 2m - 1$ суть

$$(30) \qquad \mathrm{Det}\left|\Gamma^h_{\tau i}, \Theta^\sigma_{hi}\right| = 0\,, \quad (\tau = h - m, \ldots, h - 1;\ \sigma = h - m, \ldots, h - 2)$$

и для $k = 2m$

$$(31) \qquad \mathrm{Det}\left|\Gamma^h_{\tau i}, \Theta^\sigma_{hi}\right| = 0\,, \quad (\tau = h - m, \ldots, h;\ \sigma = h - m, \ldots, h - 2)\,.$$

(Определители из (30), (31) аналогичны определителям из (17) и (19).)

Наконец, как обычно, и здесь будет интересно найти замечательные однопараметрические подмногообразия многообразия VF_k. Так, подмногообразия VF_k вдоль его особых кривых образуют *особые многообразия* VF_1 из VF_k.

Естественно называть *ассимптотическими* VF_1 в VF_k те подмногообразия VF_1, вдоль которых плоскости P_2 являются соприкасающимися к кривой, описанной точкой A_1 [1]. Из (2) и (5) следует, что дифференциальные уравнения ассимптотических подмногообразий VF_1 имеют вид

$$\begin{cases} \omega_1^\tau = 0\,, \quad \omega_1^2\omega_2^\tau + \varpi_1^1\vartheta_1^\tau = 0\,, \quad (\tau = 3, \dots, n)\,, \\ \varpi_1^\sigma = 0\,, \quad \varpi_1^2\varpi_2^\sigma + \varpi_1^1\eta_1^\sigma = 0\,, \quad (\sigma = 2, \dots, n)\,. \end{cases} \tag{32}$$

Конечно, такие подмногообразия не всегда существуют.

Будем называть *геодезическими подмногообразиями* VF_1 в VF_k те подмногообразия, вдоль которых все прямые P_1 совпадают [1].

Для них мы найдем уравнения

$$\omega_1^\tau = \varpi_1^\tau = \vartheta_1^\tau = \eta_1^\tau = 0\,, \quad (\tau = 2, \dots, n)\,. \tag{33}$$

Очевидно, не трудно получить и другие аналогичные результаты.

Литература

[1] *Вайсман И.:* К геометрии многообразий флагов в симплектическом пространстве. Чех. Мат. Журнал *18* (*93*), (1968), 377—387.

[2] *Vaisman I.:* Courbes, configurations de Myller et distributions dans les espaces à connexion symplectique. An. st. Univ. Iași, T. *X* (1964), p. 417—436.

Адрес автора: Seminarul Matematic „A. Myller“, Universitate Iași, România.