Czechoslovak Mathematical Journal

Miloslav Jůza

Systèmes monoparamétriques des espaces projectifs

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 2, 363–367

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100903`

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

SYSTÈMES MONOPARAMETRIQUES DES ESPACES PROJECTIFS

MILOSLAV JŮZA, Praha

(Reçu le 1 juillet 1968)

Dans ce travail, il y a une généralisation de quelques notions de la théorie de ČECH des surface réglées sur les systèmes monoparamétriques des espaces projectifs dans un espace projectif de la dimension arbitraire.

1. Dans un espace projectif (réel) $\boldsymbol{S}_m$ de la dimension m ayons un système d'espaces projectifs $\boldsymbol{S}_n(t) = [y_0(t), y_1(t), \ldots, y_n(t)]$ de la dimension n dépendant d'un paramètre (réel) t. La variété formée par les espaces $S_n(t)$ sera appelée *monosystème*.

Soit h un nombre naturel et le rang de la matrice

$$(y_0, y_1, \ldots, y_n, y'_0, \ldots, y'_n, \ldots, y_0^{(h)}, \ldots, y_n^{(h)}) \tag{1}$$

soit $(n + 1)(h + 1)$. Si nous avons sur le monosystème le point

$$x_0 = \sum_{i=0}^{n} a_0^i\, y_i(t_0)\,, \tag{2}$$

alors l'espace h-osculateur du monosystème à ce point est l'espace

$$\boldsymbol{T}_h(\alpha_0^i, t_0) = [y_0, \ldots, y_n, y'_0, \ldots, y'_n, \ldots, y_0^{(h-1)}, \ldots, y_n^{(h-1)}, \sum_{i=0}^{n} \alpha_0^i y_i^{(h)}]_{t=t_0} \tag{3}$$

et l'union des espaces h-osculateurs de tous les points de l'espace $[y_0(t_0), \ldots, y_n(t_0)]$ est l'espace

$$\boldsymbol{T}_h(t_0) = [y_0, \ldots, y_n, y'_0, \ldots, y'_n, \ldots, y_0^{(h)}, \ldots, y_n^{(h)}]_{t=t_0}\,. \tag{4}$$

Ayons sur le monosystème une courbe

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha^i(t)\, y_i(t),\ \alpha^i(t_0) = \alpha_0^i\,. \tag{5}$$

Le point x_0 sera appelé *point semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre* 1 de cette courbe, si

$$x^{(h+1)}(t_0) \in \boldsymbol{T}_h(t_0)$$

a lieu. *La courbe* est *semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre* 1, si chaque son point est semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1.

Supposons que nous avons déjà défini courbe semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre $k - 1$. Alors le point $x(t_0)$ de telle courbe sera appelé son *point semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre k*, si

$$x^{(h+k)}(t_0) \in \boldsymbol{T}_h(t_0)$$

a lieu. *La courbe* sera appelée *semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre k*, si chaque son point est tel. Nous dirons aussi *semiasymptotique* à la place de semiquasiasymptotique d'indice 1.

Nous dirons que le point $x(t_0)$ de la courbe $x(t)$ est son *point quasiasymptotique d'indice h*, si

$$x^{(h+1)}(t_0) \in \boldsymbol{T}_h(\alpha_0^i, t_0)$$

a lieu. *La courbe quasiasymptotique d'indice h* est la courbe dont tous les points sont quasiasymptotiques d'indice h. Nous dirons *asymptotique* à la place de quasiasymptotique d'indice 1.

2. Le rang de la matrice (1) soit $(n + 1)(h + 1)$ et le rang de la matrice

$$\left(y_0, \ldots, y_n, y'_0, \ldots, y'_n, \ldots, y_0^{(h+1)}, \ldots, y_n^{(h+1)}\right)$$

soit $(n + 1)(h + 1) + k$, $0 \leqq k \leqq n + 1$. Nous pouvons numéroter les courbes directrices de façon que les points

$$y_0, \ldots, y_n, y'_0, \ldots, y'_n, \ldots, y_0^{(h)}, \ldots, y_n^{(h)}, y_0^{(h+1)}, \ldots, y_{k-1}^{(h+1)} \tag{6}$$

soient linéairement indépendants. Alors il vaut

$$y_i^{(h+1)} = \sum_{j=0}^{k-1} a_i^j y_j^{(h+1)} + \sum_{\lambda=0}^{h} \sum_{j=0}^{n} m_{i,\lambda}^j y_j^{(\lambda)}, \quad i = k, k + 1, \ldots, n, \tag{7}$$

où a_i^j, $m_{i,\lambda}^j$ sont des fonctions de t. Si nous introduissons les nouvelles courbes directrices par les rélations

$$\bar{y}_i = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, k - 1,$$

$$\bar{y}_i = y_i - \sum_{j=0}^{k-1} a_i^j y_j, \quad i = k, k + 1, \ldots, n,$$

alors $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n$ seront liées par les rélations similaires à (7), mais il sera encore $a_i^j = 0$ pour tous i, j. Les points (6) resteront linéairement indépendants. Alors nous supposerons désormais que les points (6) sont linéairement indépendants et que les courbes directrices ont été choises de sorte que

$$y_i^{(h+1)} = \sum_{\lambda=0}^{h} \sum_{j=0}^{n} m_{i,\lambda}^j y_j^{(\lambda)}, \quad i = k, k+1, \ldots, n, \tag{8}$$

eût lieu.

Ayons sur le monosystème la courbe (5). Nous allons chercher quand le point $x(t_0)$ est son point semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1. Nous avons d'après (8)

$$\begin{aligned} x^{(h+1)} &= \sum_{j=0}^{n} \alpha^j y_j^{(h+1)} + \sum_{l=0}^{h} \sum_{j=0}^{n} (\cdot)\, y_j^{(l)} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j y_j^{(h+1)} + \sum_{l=0}^{h} \sum_{j=0}^{n} (\cdot)\, y_j^{(l)} \end{aligned}$$

on $(.)$ signifie les coefficients que nous n'intéressent pas. Pour $x^{(h+1)}(t_0) \in T_h(t_0)$ il est nécéssaire et il suffit que

$$\alpha^0(t_0) = \alpha^1(t_0) = \ldots = \alpha^{(k-1)}(t_0)$$

ait lieu.

Alors *l'espace* $[y_k(t_0), \ldots, y_n(t_0)]$ *de la dimension* $n - k$ *a la propriété que le point* $x(t_0)$ *est un point semiquasiasymptotique d'indice* h *et d'ordre* 1 *de la courbe* $x(t)$ *si et seulement si* $x(t_0) \in [y_k(t_0), \ldots, y_n(t_0)]$. *La courbe* $x(t)$ *est semiquasiasymptotique d'indice* h *et d'ordre* 1 *si et seulement s'elle est placée sur la variété* $[y_k(t), \ldots, \ldots, y_n(t)]$.

Spécialement, si $k = n + 1$, alors les points

$$y_0, \ldots, y_n, y_0', \ldots, y_n', \ldots, y_0^{(h+1)}, \ldots, y_n^{(h+1)}$$

sont linéairement indépendants, alors aucune courbe de la forme (5) sur le monosystème n'a de points semiquasiasymptotiques d'indice h. Si $k = 0$, alors chaque courbe sur le monosystème est semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1 (de même, comme on voit aisément, d'ordre arbitraire).

3. Les courbes directrices du monosystème soient choisies de sorte que (8) ait lieu. Soit

$$x(t) = \sum_{j=k}^{n} \alpha^j(t)\, y_j^{(t)} \tag{9}$$

une courbe semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1 sur le monosystème. Par la différentiation et l'application de (8) on obtient

$$x^{(h+1)} = \sum_{j=k}^{n} \alpha^j y_j^{(h+1)} + \sum_{l=0}^{h} \sum_{j=k}^{n} (\cdot)\, y_j^{(l)} =$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \alpha^j \sum_{q=0}^{k-1} m_{j,h}^q y_q^{(h)} + \sum_{q=k}^{n} (\cdot)\, y_q^{(h)} + \sum_{l=0}^{h-1} \sum_{q=0}^{n} (\cdot)\, y_q^{(l)},$$

$$x^{(h+2)} = \sum_{q=0}^{k-1} \Big(\sum_{j=k}^{n} \alpha^j m_{j,h}^q \Big)\, y_q^{(h+1)} + \sum_{l=0}^{h} \sum_{q=0}^{n} (\cdot)\, y_q^{(l)}.$$

On voit *que* $x^{(h+2)}(t_0) \in \boldsymbol{T}(t_0)$ (*cela signifie que* $x(t_0)$ *est le point semiquasiasymptotique d'indice* h *et d'ordre* 2 *de la courbe* $x(t)$ *si et seulement si on a*

$$\sum_{j=k}^{n} \alpha^j(t_0)\, m_{j,h}^q(t_0) = 0 \quad pour \quad q = 0, \ldots, k-1\,. \tag{10}$$

Ces points forment un sous-espace linéaire de la dimension $n - k - k_1$ *de l'espace* $[y_0(t_0), \ldots, y_n(t_0)]$, *où* k_1 *est le rang de la matrice* $(m_{j,h}^\alpha(t_0))$ $(j = k, \ldots, n;\ \alpha = 0, \ldots, k-1)$. *Il y a évidemment* $k_1 \leqq k$.

Si on a spécialement $k + k_1 = n + 1$, des points semiquasiasymptotiques d'ordre 2 n'existent sur aucune courbe semiquasiasymptotique d'ordre 1. Si on a $k_1 = 0$, alors sur chaque courbe semiquasiasymptotique d'ordre 1 le point $x(t_0)$ est semiquasiasymptotique d'ordre 2.

4. Choisissons les courbes directrices sur le monosystème de façon que (8) ait lieu et ayons sur ce monosystème une courbe (5). Nous allons établir quand le point $x(t_0)$ est le point quasiasymptotique d'indice h de cette courbe.

D'après (8) nous avons

$$x' = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j y_j' + \sum_{j=0}^{n} \alpha^{j\prime} y_j\,,$$

$$x^{(h+1)} = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j y_j^{(h+1)} + \sum_{j=0}^{n} h\alpha^{j\prime} y_j^{(h)} + \sum_{l=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{n} (\cdot) y_j^{(l)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^j y_j^{(h+1)} + \sum_{j=0}^{n} \Big(h\alpha^{j\prime} + \sum_{q=k}^{n} \alpha^q m_{q,h}^j \Big)\, y_j^{(h)} + \sum_{l=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{n} (\cdot)\, y_j^{(l)}\,.$$

Les points (6) étant linéairement indépendants, d'après (3) il y a $x(t_0) \in \boldsymbol{T}_h(\alpha_0^j, t_0)$ si et seulement si

(A) $$\alpha^0(t_0) = \ldots = \alpha^{(k-1)}(t_0) = 0\,;$$

(B) le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha^0, & \ldots, & \alpha^n \\ h\alpha^{0\prime} + \sum_{q=k}^{n} \alpha^q m_{q,h}^0, & \ldots, & h\alpha^{n\prime} + \sum_{q=k}^{n} \alpha^q m_{q,h}^n \end{pmatrix}$$

est 1 pour $t = t_0$.

La condition (A) nous dit que le point $x(t_0)$ doit être semiquasiasymptotique d'indice h et d'ordre 1. La condition (B) est remplie, parce que un des nombres $\alpha^{(k)}(t_0), \ldots, \alpha^{(n)}(t_0)$ au moins est différent de zéro, si et seulement s'il existe un nombre β de sorte que

$$\alpha^{j\prime}(t_0) = -\frac{1}{h}\sum_{q=k}^{n} \alpha^q(t_0)\, m^j_{q,h}(t_0) + \beta\alpha^j(t_0) \quad \text{pour} \quad j \leqq 0, \ldots, n\,,$$

alors si pour $t = t_0$ on a

$$x' = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j y'_j - \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{n}\sum_{q=k}^{n} \alpha^q m^j_{q,h} y_j + \beta\sum_{j=0}^{n} \alpha^j y_j\,,$$

alors si la tangente de la courbe $x(t)$ au point $x(t_0)$ est la droite

$$\left[x(t_0), \left(\sum_{j=k}^{n} \alpha^j y'_j - \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{n}\sum_{q=k}^{n} \alpha^q m^j_{q,h} y_j\right)_{t=t_0}\right].$$

Alors nous avons ce théorème: *Les points* (6) *étant linéairement indépendants et* (8) *étant rempli, le point* $x(t_0)$ *peut être le point quasiasymptotique d'indice* h *de la courbe* $x(t)$ *si et seulement s'il est placé à l'espace* $[y_k(t_0), \ldots, y_n(t_0)]$. *A chaque point de cet espace il existe une et une seule direction (direction quasiasymptotique) telle que le point* $x(t_0)$ *est le point quasiasymptotique d'indice* h *si et seulement si la tangent de la courbe* $x(t)$ *au point* $x(t_0)$ *a cette direction.*

Littérature

[1] *M. Jůza:* Sur les variétés représentant une généralisation des surfaces réglées. Czech. Mat. Journal, *10* (85), 1960, 440—456.

[2] *M. Jůza:* Jednoparametrické systémy rovin v prostoru S_6. Matem.-fyz. čas. SAV, *13*, 1963, 125—136.

Adresse de l'auteur: Praha 1, Loretánské nám. 3, ČSSR (Výzkumný ústav matematických strojů).