

Jaromír Suchomel

Wronskische Determinanten von Lösungen iterierter Gleichungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 4, 711–715

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100930>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

WRONSKISCHE DETERMINANTEN
VON LÖSUNGEN ITERIERTER GLEICHUNGEN

JAROMÍR SUCHOMEL, Brno

(Eingelangt am 24. Februar 1969)

1. Es sei I ein beliebiges Intervall und es seien $\alpha(x), u(x), v(x)$ Funktionen mit folgenden Eigenschaften

$$(1,1) \quad \alpha, u, v \in C_n(I), \quad (n > 0, \text{ ganz}), \\ \alpha > 0, \quad u \neq 0 \quad \text{in } I,$$

$$(1,2) \quad W(u, v) = uv' - u'v = 1 \quad \text{in } I.$$

Setzen wir

$$(1,3) \quad y_k(x) = \begin{cases} ((k-1)!)^{-1} \alpha u^{n-k} v^{k-1} & \text{für } k = 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{für } k \leq 0. \end{cases}$$

1.1. Es gilt

$$(1,4) \quad y_k^{(l)} = \sum_{j=0}^l \varphi_j^l(x) y_{k-j}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad l = 0, 1, \dots, n-1,$$

wo $\varphi_j^l \in C_{n-l}(I)$ für gegebenes l die j -te Funktion ist, die die Gleichung

$$(1,5) \quad \varphi_j^{l+1} = \varphi_0^l \varphi_j^l + \varphi_1^l \varphi_{j-1}^l + (\varphi_j^l)', \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \\ j = 0, 1, \dots, l$$

mit

$$(1,6) \quad \varphi_0^0 = 1, \quad \varphi_0^1 = (n-1)u'u^{-1} + \alpha'\alpha^{-1}, \quad \varphi_1^1 = u^{-2}, \\ \varphi_{-j}^l = \varphi_{l+j}^l = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

erfüllt.

Beweis. Die Formeln (1,4), (1,5) werden mittels Induktion in bezug auf l vermöge (1,2), (1,3), (1,6) bewiesen.

1.2. Nach (1,5), (1,6) gilt

$$(1,7) \quad \varphi_l^i = u^{-2l}, \quad l = 0, 1, \dots, n.$$

2. Im Folgenden bezeichnen wir mit dem Symbol $D_s(a_{ik})$ eine Determinante s -ter Ordnung, die in der i -ten Zeile und der k -ten Spalte das Element a_{ik} hat. Es sei ferner

$$(2,1) \quad \{r_k\}_s = \{r_1, r_2, \dots, r_s\}, \quad s \leq n, \quad r_s \leq n$$

eine s -gliedrige wachsende Folge von natürlichen Zahlen und es sei

$$(2,2) \quad c_i = \begin{cases} (i!)^{-1} & \text{für } i = 0, 1, \dots, \\ 0 & \text{für } i < 0. \end{cases}$$

2.1. Für die Wronskische Determinante $W(y_{r_1}, y_{r_2}, \dots, y_{r_s})$ gilt

$$(2,3) \quad W(y_{r_1}, \dots, y_{r_s}) = u^{s(1-s)} D_s(y_{r_k-i+1}).$$

Beweis. Nach (1,4) ist

$$W(y_{r_1}, \dots, y_{r_s}) = D_s(y_{r_k}^{(i-1)}) = D_s\left(\sum_{j=0}^{i-1} \varphi_j^{i-1} y_{r_k-j}\right) = D_s(\varphi_{i-1}^{i-1} y_{r_k-i+1}),$$

woraus vermöge (1,7) die Formel (2,3) folgt.

2.2. Nach (1,3) gilt

$$(2,4) \quad D_s(y_{r_k-i+1}) = \alpha^s D_s(a_{ik}(x)),$$

wo

$$(2,5) \quad a_{ik} = \begin{cases} c_{r_k-i} u^{n-r_k+i-1} v^{r_k-i} & \text{für } r_k - i \geq 0, \\ 0 & \text{für } r_k - i < 0. \end{cases}$$

2.3. Es gilt

$$(2,6) \quad D_s(a_{ik}) = u^{sn-R+(s/2)(s-1)} v^{R-(s/2)(s+1)} D_s(c_{r_k-i}),$$

wo

$$(2,7) \quad R = \sum_{k=1}^s r_k.$$

Beweis. Es ist $D_s(a_{ik}) = \sum_M \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_s) \prod_{k=1}^s a_{i_k k}$, wobei die Summe sich auf die Menge M aller Permutationen $\left\{ \begin{matrix} 1, 2, \dots, s \\ i_1, i_2, \dots, i_s \end{matrix} \right\}$ der Zeilenindizes erstreckt und wobei

$\text{sgn}(i_1, \dots, i_s) = 1$ bzw. -1 für eine gerade bzw. ungerade Permutation ist, siehe [2, S. 18, 19]. Ferner gilt

$$\begin{aligned} D_s(a_{ik}) &= \sum_{M^*} \text{sgn}(i_1, \dots, i_s) \prod_{k=1}^s c_{r_k - i_k} u^{n - r_k + i_k - 1} v^{r_k - i_k} = \\ &= u^{sn - R + (s/2)(s-1)} v^{R - (s/2)(s+1)} \sum_{M^*} \text{sgn}(i_1, \dots, i_s) \prod_{k=1}^s c_{r_k - i_k}, \end{aligned}$$

wo $M^* \subset M$ die Menge aller Permutationen ist, für die $r_k - i_k \geq 0$ für alle $k = 1, 2, \dots, s$ in Kraft ist.

2.4. Satz. Für die Wronskische Determinante der Funktionen (1,3) gilt die Formel

$$(2,8) \quad W(y_{r_1}, \dots, y_{r_s}) = \alpha^s u^{sn - R - (s/2)(s-1)} v^{R - (s/2)(s+1)} D_s(c_{r_k - i_k})$$

mit den Bezeichnungen (2,1), (2,2), (2,7).

Beweis folgt aus (2,3), (2,4), (2,6).

3. Es gilt

$$(3,1) \quad D_s(c_{k-i}) = 1, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

3.1. Lemma. Es gilt

$$(3,2) \quad W(y_1, y_2, \dots, y_s) = \alpha^s u^{s(n-s)}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Das Lemma folgt aus Satz 2.4, wo $R = \frac{1}{2}s(s+1)$ und (3,1) zu nehmen ist.

3.2. Es sei $j > 0$, ganz, und für $l = 0, 1, \dots, j-1$ gelte

$$b_{ik}^l = \begin{cases} c_{l+k} & \text{für } i = 1, \quad k = 1, 2, \dots, j-l, \\ c_{k-i+1} & \text{für } i = 2, 3, \dots, j-l, \quad k = 1, 2, \dots, j-l. \end{cases}$$

Dann gilt

$$(3,3) \quad \sum_{v=0}^l (-1)^v c_v D_{j-v}(c_{k-i+1}) = (-1)^l D_{j-l}(b_{ik}^l), \quad l = 0, 1, \dots, j-1.$$

Beweis wird mittels Induktion in bezug auf l durchgeführt.

3.3. Setzen wir $l = j-1$ in (3,3) ein, so erhalten wir nach Umformung

$$(3,4) \quad \sum_{v=0}^j (-1)^v c_v D_{j-v}(c_{k-i+1}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots,$$

wo wir

$$(3,5) \quad D_0(c_{k-i+1}) = 1$$

setzen.

3.4. Es gilt

$$(3,6) \quad D_j(c_{k-i+1}) = c_j, \quad j > 0, \quad \text{ganz.}$$

Beweis wird mittels Induktion in bezug auf j mit Hilfe (3,4), (3,5) durchgeführt.

3.5. Bezeichnen wir $\{r_k^j\}_{n-1} = \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ für $j = 1, 2, \dots, n$.
Dann gilt

$$(3,7) \quad D_{n-1}(c_{r_k^j-i}) = c_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Beweis. Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz, siehe z. B. [2, S. 34], gilt $D_{n-1}(c_{r_k^j-i}) = D_{j-1}(c_{k-i}) D_{n-j}(c_{k-i+1})$, woraus vermöge (3,1), (3,5), (3,6) die Formel (3,7) folgt, wo $D_0(c_{k-i}) = 1$ zu nehmen ist.

3.6. Lemma. Es gilt

$$(3,8) \quad W(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n) = \alpha^{n-2} y_{n-j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Das Lemma folgt aus Satz 2.4, wo $R = \frac{1}{2}n(n+1) - j$ und (3,7) zu nehmen ist.

4. Es sei eine iterierte Differentialgleichung n -ter Ordnung, $n \geq 3$, von der Form

$$(4,1) \quad I_n(y; a_1, a_2) = 0$$

gegeben, wo $a_i \in C_{n-i}(I)$, $i = 1, 2$ und I ein beliebiges Intervall ist. Es sei ferner $\alpha = \exp \left\{ - \int_{x_0}^x a_1(t) dt \right\}$, $x_0 \in I$, $W(u, v) = 1$ in I , wo u, v Lösungen der Gleichung

$$(4,2) \quad y'' + \frac{3}{n-1} (a_2 - a_1 - a_1^2) y = 0$$

darstellen. Dann bilden die Funktionen

$$(4,3) \quad y_k(x) = ((k-1)!)^{-1} \alpha u^{n-k} v^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

ein Hauptsystem von Lösungen der Gleichung (4,1). Siehe [1, S. 49].

4.1. Satz. Für die Wronskische Determinante der Funktionen (4,3) gilt die Formel (2,8) mit den Bezeichnungen (2,1), (2,2), (2,7).

Beweis. Nach (2,7) gilt $\frac{1}{2}s(s+1) \leq R \leq \frac{1}{2}s(2n-s+1)$, woraus die Stetigkeit der rechten Seite von (2,8) folgt. Nehmen wir an, daß $x_0 \in I$ existiert, für das

(2,8) nicht gilt. Da beide Seiten von (2,8) stetig sind, existiert ein geschlossenes nichtleeres Intervall $I_0 \subset I$, $x_0 \in I_0$, in dem (2,8) nicht gilt. Da u eine Lösung von (4,2) ist, hat es in I_0 nur endlich viele Wurzeln und es existiert ein nichtleeres Intervall $I_1 \subset I_0$, in dem $u \neq 0$ in Kraft ist. In I_1 gilt (1,1), (1,2), (1,3) und gemäß dem Satze 2.4 gilt (2,8). Dieser Widerspruch beweist den Satz 4.1.

4.2. Für die Funktionen (4,3) gelten die Lemmata 3.1 und 3.6.

Beweis folgt aus Satz 4.1.

4.3. Satz. Es seien z_1, z_2, \dots, z_s , $s \leq n$, beliebige Lösungen von (4,1). Dann gilt

$$W(z_1, \dots, z_s) = \alpha^s \sum_{j=0}^{s(n-s)} b_j u^{s(n-s)-j} v^j,$$

wo b_j , $j = 0, 1, \dots, s(n-s)$, Konstanten sind.

Beweis. Es gilt $z_k = \sum_{j=1}^n c_{kj} y_j$, $k = 1, 2, \dots, s$, wo c_{kj} Konstanten sind. Nach dem Multiplikationssatz rechteckiger Matrizen, siehe [2, S. 65, 66], gilt

$$W(z_1, \dots, z_s) = D_s \left(\sum_{j=1}^n c_{kj} y_j^{(i-1)} \right) = \sum_N D_s(c_{ir_k}) D_s(y_{r_k}^{(i-1)}),$$

wobei die Summe sich auf die Menge N aller Folgen von der Form (2,1) erstreckt. Nach dem Satz 4.1 gilt ferner

$$\begin{aligned} W(z_1, \dots, z_s) &= \sum_{j=0}^{s(n-s)} \sum_{N_j} D_s(c_{ir_k}) \alpha^s u^{sn-R_j-(s/2)(s-1)} v^{R_j-(s/2)(s+1)} D_s(c_{r_k-i}) = \\ &= \alpha^s \sum_{j=0}^{s(n-s)} u^{s(n-s)-j} v^j \sum_{N_j} D_s(c_{ir_k}) D_s(c_{r_k-i}), \end{aligned}$$

wo $N_j \subset N$ eine durch die Formel

$$\{r_k\}_s \in N_j \Leftrightarrow \sum_{k=1}^s r_k = R_j = \frac{s}{2}(s+1) + j, \quad j = 0, 1, \dots, s(n-s)$$

definierte Menge ist.

Literatur

- [1] Z. Hustý: Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, No. 449, 23–56 (1964).
- [2] G. Kowalewski: Einführung in die Determinantentheorie, Berlin, 1942.

Anschrift des Verfassers: Brno, nám. 28. října 26, ČSSR.