

Izu Vaisman

Sur la partie d'une hypersurface, où le tenseur asymptotique est du type hyperbolique normal

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 4, 750–757

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100935>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SUR LA PARTIE D'UNE HYPERSURFACE, OÙ LE TENSEUR ASYMPTOTIQUE EST DU TYPE HYPERBOLIQUE NORMAL

IZU VAISMAN, Jassy

(Reçu le 3 mars 1969)

1. Soit V^n ($n \geq 2$) une hypersurface régulière de classe C^∞ (cette classe de différentiabilité sera toujours supposée dans la suite) de l'espace euclidien E^{n+1} . Supposons qu'elle est orientée et notons par g le tenseur métrique et par b le tenseur asymptotique de celle-ci (déterminé par l'orientation). Alors, la partie de V^n où b est du type hyperbolique normal, c'est-à-dire de rang n et de forme canonique $(-, +, \dots, +)$, est formée par les points qui, pour un indice i ($i = 1, \dots, n$), satisfont aux conditions

$$(1) \quad \kappa_i < 0, \quad \kappa_\alpha > 0 \quad (\alpha = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n),$$

κ_i étant les courbures principales de l'hypersurface. Il suit que cette partie est une sous-variété ouverte de V^n et nous nous proposons d'étudier quelques objets géométriques déterminés sur elle par la structure de l'hypersurface V^n .

Pour notre but, il suffit de considérer seulement la partie de V^n où les conditions (1), à $i = 1$, sont vérifiées. Nous la noterons par \mathcal{H} et supposerons qu'elle est non vide et connexe. D'ailleurs, nous pouvons tout simplement considérer \mathcal{H} comme une hypersurface non complète de E^{n+1} . Pour $i = 2, \dots, n$, on peut faire des considérations analogues.

Dans ce qui suit, nous ferons appel à des résultats de la théorie des hypersurfaces dans un espace euclidien, pour laquelle on peut voir [3] et à des résultats sur les structures presque-produit pour lesquels nous renvoyons à [2].

Un premier élément important est le champ de directions de la courbure principale κ_1 , qui définit sur \mathcal{H} un champ de vecteurs unitaires non nuls v . Pour ce champ, on a, dans des coordonnées locales, [3]

$$(2) \quad b_{ij}v^j = -\lambda^2 v_i \quad (\lambda^2 = -\kappa_1).$$

Considérons aussi, dans chaque point de \mathcal{H} , l'hyperplan π formé par les vecteurs tangents à V^n et orthogonaux à v .

Il suit que \mathcal{H} possède une structure presque-produit (v, π) et nous dirons que c'est la *structure presque-produit canonique* de \mathcal{H} . L'idée d'envisager une pareille structure pour une forme quadratique du type hyperbolique normal a été employée aussi dans [1].

Considérons sur \mathcal{H} les champs de tenseurs

$$(3) \quad v_h^i = v^i v_h, \quad m_h^i = \delta_h^i - v^i v_h.$$

Il est à remarquer qu'on a alors

$$(4) \quad v_{ih} = v_i v_h, \quad m_{ih} = g_{ih} - v_i v_h,$$

qui sont des tenseurs symétriques et du rang 1 et $n - 1$ respectivement.

Alors, l'équation de l'hyperplan π est

$$(5) \quad v_h^i w^h = 0$$

et celle de la droite de v est

$$(6) \quad m_h^i w^h = 0,$$

w^h étant les coordonnées d'un vecteur quelconque.

Les vecteurs colinéaires à v seront nommés *verticaux* et ceux de l'hyperplan π -*horizontaux*. Un vecteur w quelconque a une décomposition unique comme somme entre un vecteur vertical et un vecteur horizontal:

$$(7) \quad w^i = v_h^i w^h + m_h^i w^h.$$

L'opérateur φ qui associe à w la différence entre ses parties horizontale et verticale donne le tenseur qui définit la structure presque-produit canonique de \mathcal{H} [2]. On a

$$(8) \quad \varphi_i^h = m_i^h - v_i^h = \delta_i^h - 2v^h v_i$$

et ce tenseur a la propriété

$$(9) \quad \varphi_i^h \varphi_h^k = \delta_i^k.$$

Donc, en résumant ces considérations nous avons le

Théorème 1. *Le domaine \mathcal{H} de V^n possède une structure presque-produit canonique, définie par le tenseur (8).*

2. Passons maintenant à la considération du tenseur b_{ij} dans les points de \mathcal{H} .

De (3) on a

$$v_h^i + m_h^i = \delta_h^i,$$

d'où, en contractant avec b_{ik} , il suit

$$(10) \quad b_{hk} = -\lambda^2 v_h v_k + c_{hk},$$

où

$$(11) \quad c_{hk} = m_h^i b_{ik}$$

est un tenseur symétrique, de rang $n - 1$, positivement sémidéfini (et, plus précisément, positivement défini sur π) et qui a encore la propriété

$$(12) \quad c_{ik} v^k = 0.$$

D'ailleurs, les équations $c_{ik} v^k = 0$ sont équivalentes à (6) et définissent aussi la droite de v .

La forme du tenseur (10) permet d'obtenir de nouvelles relations sur \mathcal{H} , en employant les conditions de Gauss-Codazzi [3]

$$(13) \quad R_{ijkh} = b_{ih} b_{jk} - b_{ik} b_{jh},$$

$$(14) \quad b_{ij/k} = b_{ik/j},$$

où la barre désigne la dérivée covariante par rapport à la connexion riemannienne de V^n .

En effet, de (10) et (13) il suit

$$(15) \quad R_{ijkh} = \lambda^2 (c_{ik} v_j v_h + c_{jh} v_i v_k - c_{jk} v_i v_h - c_{ih} v_j v_k) + c_{ih} c_{jk} - c_{ik} c_{jh}$$

et de (10) et (14) il suit

$$(16) \quad \lambda^2 v_i \omega_{kj} + \lambda^2 (v_k v_{i/j} - v_j v_{i/k}) + 2\lambda v_i (\lambda_j v_k - \lambda_k v_j) + c_{ijk}$$

où

$$(17) \quad c_{ijk} = c_{ij/k} - c_{ik/j},$$

$$(18) \quad \omega_{kj} = v_{k/j} - v_{jjk}$$

et $\lambda_j = \partial\lambda/\partial x^j$.

Les plans bidimensionnels tangents à V^n dans les points de \mathcal{H} , qui passent par v , seront nommés *verticaux*; ceux qui sont contenus dans π -*horizontaux*. La courbure sectionnelle correspondante sera nommée respectivement *courbure verticale* et *horizontale*.

Théorème 2. *La courbure sectionnelle horizontale dans \mathcal{H} est toujours positive et la courbure verticale est toujours négative.*

En effet, pour le plan horizontal défini par les vecteurs unitaires et orthogonaux ξ et η , (15) donne la courbure sectionnelle [3]

$$(19) \quad k(\xi, \eta) = \frac{R_{ijkh} \xi^i \eta^j \xi^k \eta^h}{(g_{ih} g_{jk} - g_{ik} g_{jh}) \xi^i \eta^j \xi^k \eta^h} = (c_{ik} \xi^i \xi^k) (c_{jh} \eta^j \eta^h) - (c_{ih} \xi^i \eta^h)^2$$

et la première conclusion suit à l'aide de l'inégalité classique de Cauchy-Schwarz, c étant positivement défini sur π .

Quant à la courbure sectionnelle du plan vertical défini par v et par le vecteur unitaire et horizontal ξ elle est égale à

$$(20) \quad k(v, \xi) = -\lambda^2 c_{jh} \xi^j \xi^h,$$

d'où la seconde conclusion du théorème.

Théorème 3. *Pour que la courbure verticale dans \mathcal{H} soit fonction seulement du point, il faut et il suffit qu'on ait*

$$(21) \quad c_{jh} = \frac{k}{\lambda^2} (v_j v_h - g_{jh}),$$

où k est la courbure verticale (nécessairement négative).

En effet, en imposant la condition mentionnée sur la courbure verticale, on a

$$-\frac{\lambda^2 c_{jh} \xi^j \xi^h}{g_{jh} \xi^j \xi^h} = k$$

pour tout vecteur horizontal ξ . Ceci donne

$$(\lambda^2 c_{jh} + k g_{jh}) m_k^j m_l^h w^k w^l = 0$$

pour tout vecteur w , donc

$$(\lambda^2 c_{jh} + k g_{jh}) m_k^j m_l^h = 0,$$

condition qui est équivalente à la formule (21).

Notons maintenant

$$(22) \quad \begin{aligned} C_{ijkh} &= c_{ih} c_{jk} - c_{ik} c_{jh}, \\ G_{ijkh} &= g_{ih} g_{jk} - g_{ik} g_{jh}, \\ M_{ijkh} &= m_{ih} m_{jk} - m_{ik} m_{jh}. \end{aligned}$$

Tous ces tenseurs ont les mêmes propriétés de symétrie que le tenseur de courbure R_{ijkh} , y compris la première identité de Bianchi [3].

Alors nous pouvons obtenir le

Théorème 4. Pour que la courbure horizontale dans \mathcal{H} soit fonction seulement du point, il faut et il suffit qu'on ait

$$(23) \quad C_{ijkh} = kM_{ijkh},$$

où k est la courbure horizontale (nécessairement positive).

En effet, en imposant la condition indiquée sur la courbure horizontale, on trouve

$$(C_{ijkh} - kG_{ijkh}) \xi^i \eta^j \xi^k \eta^h = 0$$

pour tous les vecteurs horizontaux ξ et η . Il suit alors pour toute paire de vecteurs w_1, w_2

$$(C_{ijkh} - kG_{ijkh}) m_s^i m_t^j m_p^k m_q^h w_1^s w_2^t w_1^p w_2^q = 0,$$

ce qui revient à

$$(C_{ijkh} - kM_{ijkh}) w_1^i w_2^j w_1^k w_2^h = 0.$$

De cette condition, à cause des propriétés de symétrie mentionnées plus haut, il suit justement (23).

En partant maintenant de la formule (16) et en contractant avec v^i , on trouve, compte tenu de la relation

$$(24) \quad v^i v_{i/k} = 0,$$

qui résulte de $v^i v_i = 1$:

$$(25) \quad \lambda^2 \omega_{kj} = 2\lambda(\lambda_k v_j - \lambda_j v_k) - c_{ijk}.$$

Cette formule donne le

Théorème 5. Si $\lambda = \text{const.}$ et c_{ij} est un champ de tenseurs récurrents dans \mathcal{H} ($c_{ij/k} = a_k c_{ij}$), le champ v est un gradient.

3. Revenons maintenant à la structure presque-produit canonique de \mathcal{H} et considérons sur \mathcal{H} le tenseur antisymétrique

$$(26) \quad \sigma_{kj} = (v_k^i \delta_j^p - v_j^i \delta_k^p) \omega_{pi}.$$

Un calcul usuel donne pour le tenseur de structure de la structure presque-produit envisagée [2]

$$(27) \quad t_{jk}^i = v^i (\omega_{kj} + \sigma_{kj}),$$

d'où

Théorème 6. *La structure presque-produit canonique de \mathcal{H} est intégrable si et seulement si*

$$(28) \quad \omega_{kj} = \sigma_{jk}.$$

En particulier, ceci a lieu pour $\omega_{kj} = 0$.

Corollaire. *Si les hypothèses du théorème 4 sont vérifiées, la structure presque-produit de \mathcal{H} est intégrable.*

Remarquons aussi qu'à l'aide des formules (25) et (27), on trouve

$$(29) \quad \lambda^2 t_{jk}^i = (c_{hik} v^l v_j - c_{hij} v^l v_k - c_{hjk}) v^h v^i,$$

formule qui montre qu'il suffit que le tenseur c_{ij} soit récurrent pour que la structure presque-produit canonique soit intégrable.

Un autre champ de tenseurs sur \mathcal{H} qui présente de l'intérêt est

$$(30) \quad T_{ik}^h = v_{ijk} v^h - v_i v_{/k}^h.$$

A l'aide de ce champ de tenseurs, on peut définir sur \mathcal{H} la connexion linéaire

$$(31) \quad \Gamma_{ik}^h = \{^h_{ik}\} + T_{ik}^h,$$

où $\{^h_{ik}\}$ sont les symboles de Christoffel de V^n . Nous dirons que la connexion (31) est la connexion presque-produit de \mathcal{H} et, par un calcul direct, on trouve le

Théorème 7. *En notant par „,“ la dérivée covariante par rapport à Γ , on a*

$$(32) \quad \varphi_{i;k}^j = 0.$$

Donc, le transport par parallélisme dans la connexion Γ garde la structure presque-produit de \mathcal{H} .

Pour le tenseur T , on a

$$(33) \quad T_{ik}^i = 0.$$

Si l'on suppose $T_{ik}^h = 0$, on trouve, en contractant avec $v^i, v_{/k}^h = 0$, donc, compte tenu de (27), si la connexion Γ_{ik}^h coïncide avec $\{^h_{ik}\}$, la structure presque-produit canonique de \mathcal{H} est intégrable.

Le tenseur de torsion de la connexion Γ est

$$(34) \quad \tau_{ik}^h = 2(v^h \omega_{ik} - v_{[i/k}^h]).$$

Il satisfait aux relations

$$(35) \quad \tau_{ik}^i = 0, \quad \tau_{jk}^i v_i = \omega_{jk},$$

d'où il suit que $\tau_{jk}^i = 0$ implique l'intégrabilité de la structure presque-produit canonique de \mathcal{H} .

Le tenseur de courbure ϱ de la connexion Γ est donné par chacune des formules

$$(36) \quad \varrho_{jkh}^i = R_{jkh}^i - v^s(v^i R_{sjkh} + v_j R_{skh}^i) + v_{j/k} v_{/h}^i - v_{/k}^i v_{/h}^j,$$

$$(37) \quad \varrho_{jkh}^i = c_{jk} c_h^i - c_k^i c_{jh} + v_{j/k} v_{/h}^i - v_{/k}^i v_{/h}^j,$$

où R est le tenseur de courbure de la métrique g . Il suit immédiatement

$$(38) \quad \varrho_{jkh}^i v_i = 0.$$

Aussi, la formule (37) peut s'interpréter par le

Théorème 8. *Considérons les conditions*

- a) $c_{ik} c_{jk} - c_{ik} c_{jh} = 0$,
- b) $v_{i/h} v_{j/k} - v_{i/k} v_{j/h} = 0$,
- c) $\varrho_{jkh}^i = 0$.

Si deux de ces conditions sont vérifiées, la troisième est aussi vérifiée et, nécessairement, $n = 2$.

La dernière affirmation est une conséquence de a), qui donne $\text{rang}(c_{ij}) = 1$.

4. Considérons encore sur \mathcal{H} le champ de tenseurs

$$(39) \quad a_{ij} = \lambda^2 v_i v_j + c_{ij}.$$

Ce champ définit sur \mathcal{H} une nouvelle métrique riemannienne, positivement définie, que nous appellerons la *métrique asymptotique* de \mathcal{H} .

En notant

$$(40) \quad p^{ij} = \tilde{b}^{ih} m_h^j,$$

où, \tilde{b} est le tenseur réciproque de b ($\tilde{b}^{ih} b_{ik} = \delta_k^h$), on trouve pour le tenseur réciproque de a_{ij}

$$(41) \quad \tilde{a}^{ij} = \frac{1}{\lambda^2} v^i v^j + p^{ij}.$$

Les symboles de Christoffel de la métrique asymptotique de \mathcal{H} sont $\{^m\} + \theta_{ik}^m$, où

$$(42) \quad \theta_{ik}^m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} v^m v^j + p^{mj} \right) (2c_{ijk} + c_{jk/i}) + \frac{1}{2} \left(v^m v_{k/i} + 2 \frac{\lambda_k}{\lambda} v^m v_i + \lambda^2 p^{mj} v_k v_{/i} \right).$$

Une situation intéressante est celle où la métrique asymptotique de \mathcal{H} est conforme à la métrique g . On a alors

$$\lambda^2 v_i v_j + c_{ij} = \varphi g_{ij},$$

d'où, en contractant avec $v^i v^j$, nous avons $\varphi = \lambda^2$ et il suit

$$(43) \quad c_{ik} = \lambda^2 (g_{ik} - v_i v_k)$$

ou encore

$$(44) \quad b_{ik} = \lambda^2 (g_{ik} - 2v_i v_k).$$

Un autre cas important est celui où la longueur de tout vecteur horizontal est la même dans les métriques g et a . Il est facile de trouver la caractérisation de cette situation

$$(45) \quad c_{ij} = m_{ij} = g_{ij} - v_i v_j.$$

Les formules (43), (45) et le théorème 3 montrent que dans ces deux situations la courbure verticale de \mathcal{H} dépend seulement du point et elle est égale respectivement à $-\lambda^4$ et $-\lambda^2$. Aussi (théorème 4), la courbure horizontale de \mathcal{H} dépend seulement du point et elle est égale respectivement à λ^4 et 1.

Bibliographie

- [1] *Cattaneo Gasparini I.*: Alcune considerazioni globali su una varietà compatta a metrica indefinita. Atti Acad. Lincei, XL (1966), p. 804—811.
- [2] *Legrand G.*: Étude d'une généralisation des structures presque-complexes sur les variétés différentiables. Rend. Circ. Mat. di Palermo, 7 (1958), p. 323—354, 8 (1959), p. 5—48.
- [3] *Schouten J. A.*: Ricci Calculus, Springer Verlag, Berlin, 1954.

Adresse de l'auteur: Séminaire Mathématique „A. Myller“, Université „Al. I. Cuza“, Jassy, Roumanie.