Josef Vala

Über einige spezielle Kongruenzenpaare

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 20 (1970), No. 1, 140–148

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100953

ÜBER EINIGE SPEZIELLE KONGRUENZENPAARE

JOSEF VALA, Brno

(Eingegangen am 10. April 1969)

Die zweiparametrige Geradenmannigfaltigkeit Γ des n-dimensionalen projektiven Raumes P_n nennen wir die Kongruenz. $V_3(\Gamma)$ sei die Punktmannigfaltigkeit, die aus sämtlichen Punkten aller Erzeugenden p der Kongruenz Γ besteht. Wir werden voraussetzen, daß längs $p \subset \Gamma$ die Berührräume von $V_3(\Gamma)$ existieren. Die niedrigste Dimension des Unterraumes, der alle Berührräume von $V_3(\Gamma)$ längs p enthält, nennen wir *Charakter* der Geraden p (ŠVEC [3], S. 12).

Im projektiven dreidimensionalen Raum P_3 betrachten wir das Paar P der Kongruenzen $\Gamma_1(p_1)$, $\Gamma_2(p_2)$. Ein solches Paar besitze eine Korrespondenz C, wobei die einander zugeordneten Geraden p_1, p_2 stets demselben Parameterpaar (u, v) entsprechen. Die Parameterpaare (u, v) sollen alle Werte aus dem Gebiet Δ annehmen. Für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ seien die sich entsprechenden Erzeugenden beider Kongruenzen windschief.

Die Kleinschen Bilder der Geraden p_1, p_2 bilden die Punktmannigfaltigkeiten K_1, K_2 des Kleinschen Raumes P_5. Die Koordinaten der erwähnten Kleinschen Bilder der Geraden p_1, p_2 seien Funktionen der Differentialklasse C^2.

a) Wir betrachten ein bewegliches Koordinatentetraeder mit den Eckpunkten A_1, A_2, A_3, A_4, wobei

$$p_1 = (A_1, A_4)\,, \quad p_2 = (A_2, A_3)$$

gilt. Wenn wir mit ω_i^k die Komponenten der differentiellen Verrückung des Tetraeders bezeichnen, dann folgt:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{d}A_i = \omega_i^k A_k\,;$$
$$\mathrm{D}\omega_i^k = [\omega_i^r, \omega_r^k]\,; \quad i, r, k = 1, 2, 3, 4\,.$$

$\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^1, \omega_2^4, \omega_3^1, \omega_3^4, \omega_4^2, \omega_4^3$ sind die Hauptformen.

Im Folgenden werden wir voraussetzen, daß die Dimension der Berührräume der Punktmannigfaltigkeit K_1 für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ gleich zwei ist. Dasselbe werden wir für die Punktmannigfaltigkeit K_2 voraussetzen. Für alle Wertepaare

$(u, v) \subset \Delta$ seien noch folgende Bedingungen erfüllt: Die Kongruenzen Γ_1, Γ_2 sollen hyperbolisch sein und reguläre Brennmannigfaltigkeiten haben. Alle Geraden p_1, p_2 sollen den Charakter 3 haben.

Wir wählen die Punkte A_1, A_4 in den Brennpunkten der Kongruenz Γ_1, ebenso A_2, A_3 in den Brennpunkten der Kongruenz Γ_2. Mit α_i, $i = 1, 2, 3, 4$, bezeichnen wir die Berührebenen in den Brennpunkten bezüglich der zugehörigen Brennflächen.

Die Gleichungen (1) kann man dann in folgender Form (VALA [4]) schreiben:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_1 &= \omega_1^1 A_1 + a_1^2\omega_1 A_2 + a_1^3\omega_1 A_3 + \omega_1^4 A_4\,, \\ \mathrm{d}A_2 &= a_2^1\omega_2 A_1 + \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3 + a_2^4\omega_2 A_4\,, \\ \mathrm{d}A_3 &= a_3^1\omega_3 A_1 + \omega_3^2 A_2 + \omega_3^3 A_3 + a_3^4\omega_3 A_4\,, \\ \mathrm{d}A_4 &= \omega_4^1 A_1 + a_4^2\omega_4 A_2 + a_4^3\omega_4 A_3 + \omega_4^4 A_4\,. \end{aligned} \tag{2}$$

ω_1, ω_4 sind die unabhängigen Hauptformen, ebenso die Formen ω_2, ω_3. $a_1^2, a_1^3, a_2^1, a_2^4, a_3^1, a_3^4, a_4^2, a_4^3$ sind im allgemeinen die Funktionen der Hauptparameter und der sekundären Parameter. Nach den Voraussetzungen gilt noch:

$$\Delta_1 = a_1^2 a_4^3 - a_1^3 a_4^2 \neq 0\,, \quad \Delta_2 = a_2^1 a_3^4 - a_2^4 a_3^1 \neq 0 \quad (\text{für } (u, v) \subset \Delta)\,. \tag{3}$$

Durch jede der Gleichungen

$$\omega_1 = 0\,, \quad \omega_4 = 0\,, \quad \omega_2 = 0\,, \quad \omega_3 = 0$$

sind im P die sich entsprechenden Paare der Regelflächen bestimmt. Mindestens eine Regelfläche des Paares ist immer die Torse. Solche Paare nennt man *Torsalpaare* des Paares P (IVLEV [2], S. 19). Die zu jeder der angeführten Gleichungen gehörigen Torsalpaare bilden *das Torsalsystem*.

Durch die äußere Differentiation folgender Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\omega_1^2 = a_1^2\omega_1\,, \quad \omega_1^3 = a_1^3\omega_1\,, \quad \omega_4^2 = a_4^2\omega_4\,, \quad \omega_4^3 = a_4^3\omega_4\,, \\ &\omega_2^1 = a_2^1\omega_2\,, \quad \omega_2^4 = a_2^4\omega_2\,, \quad \omega_3^1 = a_3^1\omega_3\,, \quad \omega_3^4 = a_3^4\omega_3 \end{aligned} \tag{4}$$

bekommt man die Relationen:

$$\begin{aligned} &[a_1^2(\omega_1^1 - \omega_2^2) - \mathrm{d}a_1^2 - a_1^3\omega_3^2, \omega_1] + [a_4^2\omega_1^4, \omega_4] &&= a_1^2\,\mathrm{D}\omega_1\,, \\ &[a_1^3(\omega_1^1 - \omega_3^3) - \mathrm{d}a_1^3 - a_1^2\omega_2^3, \omega_1] + [a_4^3\omega_1^4, \omega_4] &&= a_1^3\,\mathrm{D}\omega_1\,, \\ &[a_1^2\omega_4^1, \omega_1] + [a_4^2(-\omega_2^2 + \omega_4^4) - \mathrm{d}a_4^2 - a_4^3\omega_3^2, \omega_4] &&= a_4^2\,\mathrm{D}\omega_4\,, \\ &[a_1^3\omega_4^1, \omega_1] + [a_4^3(-\omega_3^3 + \omega_4^4) - \mathrm{d}a_4^3 - a_4^2\omega_2^3, \omega_4] &&= a_4^3\,\mathrm{D}\omega_4\,, \\ &[a_2^1(-\omega_1^1 + \omega_2^2) - \mathrm{d}a_2^1 - a_2^4\omega_4^1, \omega_2] + [a_3^1\omega_2^3, \omega_3] &&= a_2^1\,\mathrm{D}\omega_2\,, \\ &[a_2^4(\omega_2^2 - \omega_4^4) - \mathrm{d}a_2^4 - a_2^1\omega_1^4, \omega_2] + [a_3^4\omega_2^3, \omega_3] &&= a_2^4\,\mathrm{D}\omega_2\,, \\ &[a_2^1\omega_3^2, \omega_2] + [a_3^1(-\omega_1^1 + \omega_3^3) - \mathrm{d}a_3^1 - a_3^4\omega_4^1, \omega_3] &&= a_3^1\,\mathrm{D}\omega_3\,, \\ &[a_2^4\omega_3^2, \omega_2] + [a_3^4(\omega_3^3 - \omega_4^4) - \mathrm{d}a_3^4 - a_3^1\omega_1^4, \omega_3] &&= a_3^4\,\mathrm{D}\omega_3\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Mit Hilfe des Cartanschen Lemmas und unter Voraussetzung der Gültigkeit von (3) geben die Gleichungen (5) die Relationen:

$$\omega_1^4 = \varrho_1^4\omega_1 + \bar{\varrho}_1^4\omega_4\,, \quad \omega_4^1 = \varrho_4^1\omega_1 + \bar{\varrho}_4^1\omega_4\,,$$
$$\omega_2^3 = \sigma_2^3\omega_2 + \bar{\sigma}_2^3\omega_3\,, \quad \omega_3^2 = \sigma_3^2\omega_2 + \bar{\sigma}_3^2\omega_3\,,$$

$$\begin{aligned}(6)\quad & a_1^2\,\mathrm{d}a_1^3 - a_1^3\,\mathrm{d}a_1^2 + a_1^2a_1^3(\omega_3^3 - \omega_2^2) - (a_1^3)^2\,\omega_3^2 + (a_1^2)^2\,\omega_2^3 = H_1\omega_1 - \varDelta_1\varrho_1^4\omega_4\,,\\ & a_4^2\,\mathrm{d}a_4^3 - a_4^3\,\mathrm{d}a_4^2 - a_4^2a_4^3(\omega_2^2 - \omega_3^3) + (a_4^2)^2\,\omega_2^3 - (a_4^3)^2\,\omega_3^2 = \varDelta_1\bar{\varrho}_4^1\omega_1 + H_4\omega_4\,,\\ & a_2^1\,\mathrm{d}a_2^4 - a_2^4\,\mathrm{d}a_2^1 + a_2^1a_2^4(-\omega_1^1 + \omega_4^4) - (a_2^4)^2\,\omega_4^1 + (a_2^1)^2\,\omega_1^4 =\\ & \qquad = H_2\omega_2 - \varDelta_2\sigma_2^3\omega_3\,,\\ & a_3^1\,\mathrm{d}a_3^4 - a_3^4\,\mathrm{d}a_3^1 + a_3^1a_3^4(-\omega_1^1 + \omega_4^4) - (a_3^4)^2\,\omega_4^1 + (a_3^1)^2\,\omega_1^4 =\\ & \qquad = \varDelta_2\bar{\sigma}_3^2\omega_2 + H_3\omega_3\,.\end{aligned}$$

b) Im Folgenden werden wir immer voraussetzen, daß die Korrespondenz $C: \varGamma_1(p_1) \to \varGamma_2(p_2)$ torsal ist. Die Erzeugenden jeder Torse $\Omega_1 \subset \varGamma_1$ entsprechen dann den Erzeugenden der Torse $\Omega_2 \subset \varGamma_2$. Dann fallen je zwei Torsalsysteme zusammen.

Wir können also voraussetzen, daß

$$(7)\qquad \omega_2 = b_1^2\omega_1\,, \quad \omega_3 = b_3^4\omega_4$$

gilt. b_2^1, b_3^4 sind allgemein die Funktionen der Hauptparameter und der sekundären Parameter.

Bei der Änderung des Parameterpaares $(u, v) \subset \varDelta$ bilden die Geraden

$$q_1 = (A_1, A_2)\,, \quad q_2 = (A_4, A_3)$$

das Paar Q der zweiparametrigen Geradenmannigfaltigkeit, d. h. das Paar der Kongruenzen $L_1(q_1)$, $L_2(q_2)$. Es existiert die Korrespondenz $E: L_1(q_1) \to L_2(q_2)$, wobei die zugeordneten Geraden stets demselben Parameterpaar $(u, v) \subset \varDelta$ entsprechen. Die Kleinschen Bilder der Geraden q_1 bilden die Punktmannigfaltigkeit Q_1, ebenso bilden die Kleinschen Bilder der Geraden q_2 die Punktmannigfaltigkeit Q_2. Die Verbindungsgeraden m der zum gleichen Wertepaar $(u, v) \subset \varDelta$ gehörigen Punkte der Mannigfaltigkeiten Q_1, Q_2 bilden eine Kongruenz. Diese Kongruenz nennt man *Rosenfeldsches Bild des Paares Q*. Der Charakter der Erzeugenden dieser Kongruenz ist im allgemeinen gleich 5.

Mit Hilfe der Gleichungen (2), (6), (7) bekommen wir leicht:

$$\begin{aligned}(8)\quad \mathrm{d}q_1 = \mathrm{d}(A_1, A_2) = {} & (\omega_1^1 + \omega_2^2)(A_1, A_2) + \omega_1[\sigma_2^3 b_2^1(A_1, A_3) + a_2^4 b_2^1(A_1, A_4) -\\ & - a_1^3(A_2, A_3) - \varrho_1^4(A_2, A_4)] + \omega_4[\bar{\sigma}_2^3 b_3^4(A_1, A_3) -\\ & - \bar{\varrho}_1^4(A_2, A_4)]\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q_2 = \mathrm{d}(A_4, A_3) = {} & -(\omega_3^3 + \omega_4^4)(A_3, A_4) + \omega_1[\varrho_4^1(A_1, A_3) - \sigma_3^2 b_2^1(A_2, A_4)] + \\ & + \omega_4[\bar{\varrho}_4^1(A_1, A_3) - a_3^1 b_3^4(A_1, A_4) + a_4^2(A_2, A_3) - \\ & - \bar{\sigma}_3^2 b_3^4(A_2, A_4)]\,. \end{aligned}$$

Der Charakter des Rosenfeldschen Bildes der Kongruenzen $L_1(q_1)$, $L_2(q_2)$ längs der Geraden m ist nur dann kleiner als 5, wenn für das zugehörige Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ die Relation

$$(\varrho_4^1\bar{\varrho}_1^4 - \sigma_3^2\bar{\sigma}_2^3 b_2^1 b_3^4)(a_1^3 a_3^1 b_3^4 - a_2^4 a_4^2 b_2^1) = 0 \tag{9}$$

gilt. Das folgt aus den Gleichungen (8).

Wir werden nun voraussetzen, daß für ein festes Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ die Relation

$$\varrho_4^1\bar{\varrho}_1^4 - \sigma_3^2\bar{\sigma}_2^3 b_2^1 b_3^4 = 0 \tag{10}$$

gilt. Betrachten wir das zu den erwähnten Parametern gehörige Geradenpaar q_1, q_2. Die zur Gleichung $\omega_1 = 0$ gehörige Tangente von Q_1 im Punkte (A_1, A_2) und die zur Gleichung $\omega_4 = 0$ gehörige Tangente von Q_2 im Punkte (A_4, A_3) liegen bei der Gültigkeit von (10) und nur dann in einer Ebene. Die zur Gleichung $\omega_1 = 0$ gehörenden Berührgeraden der Punktmannigfaltigkeit $V_3(L_1)$ in den Punkten der Geraden q_1 bilden die Kongruenz. Ähnlich bilden die Kongruenz die Berührgeraden von $V_3(L_2)$, die zur Gleichung $\omega_4 = 0$ längs q_2 gehören. Bei der Gültigkeit der Gleichung (10) und nur dann gehören beide angeführten Kongruenzen zu einem linearen Komplex.

$$\bar{\sigma}_2^3 b_3^4(A_1, A_3) - \bar{\varrho}_1^4(A_2, A_4)$$

ist das sekundäre Bild dieses Komplexes.

Wir werden nun voraussetzen, daß für ein festes Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ die Relation

$$a_1^3 a_3^1 b_3^4 - a_2^4 a_4^2 b_2^1 = 0 \tag{11}$$

gilt. Wir werden die geometrischen Eigenschaften von (11) suchen. Mit R_3 bezeichnen wir den zur Geraden $m = ((A_1, A_2), (A_4, A_3))$ gehörigen Polarraum der Kleinschen Quadrik. Dieser ist durch die Punkte (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_2, A_3), (A_2, A_4) bestimmt. Der Berührraum der Mannigfaltigkeit Q_1 im Punkte (A_1, A_2) schneidet den Raum R_3 in einem linearen Raum ${}^1R$. Ähnlich schneidet der Berührraum der Mannigfaltigkeit Q_2 im Punkte (A_4, A_3) den Raum R_3 in einem linearen Raum ${}^2R$. Bei der Gültigkeit der Gleichung (11) und nur dann existiert im Kleinschen Raum die Ebene, die die Verbindungsgerade der Punkte (A_1, A_3), (A_4, A_2) und die Räume ${}^1R$, ${}^2R$ enthält.

Wenn für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ wenigstens eine der Gleichungen (10), (11) gilt, dann hat die zugehörige Erzeugende m des Rosenfeldschen Bildes des Paares Q der Kongruenzen $L_1(q_1)$, $L_2(q_2)$ im allgemeinen den Charakter 4.

Definition. Wenn für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ die Relation (10) gilt, dann bezeichnen wir das betrachtete Paar mit PD. Wenn für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ die Relation (11) gilt, dann bezeichnen wir das Paar P mit PT.

Bemerkung. Untersuchen wir nun den Fall, daß die Punktmannigfaltigkeit Q_1 in eine Kurve zerfällt. Dann zerfällt die Kongruenz $L_1(q_1)$ in eine Regelfläche. Nach (8) gilt dann:

$$a_1^3 = 0\,, \quad a_2^4 = 0\,, \tag{12}$$

$$\sigma_2^3 \bar{\varrho}_1^4 b_2^1 - \bar{\sigma}_2^3 \varrho_1^4 b_3^4 = 0\,. \tag{13}$$

Jede Ebene α_1 geht durch den zugehörigen Punkt A_2, jede Ebene α_2 geht durch den zugehörigen Punkt A_1. Auf den Flächen (A_1), (A_2) betrachten wir die Linien $\omega_1^4 = 0$. Das Kleinsche Bild aller Tangenten jeder dieser Linien ist ein Punkt auf der Kleinschen Quadrik. Aus den Gleichungen (2), (13) folgt dann, daß diese Linien die Geraden q_1 sind. Die Flächen (A_1), (A_2) gehören dann zu einer Regelfläche.

c) Wir werden nun einige Eigenschaften der Ebenen α_i, $i = 1, 2, 3, 4$, betrachten. Es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -a_1^2(A_1, A_2, A_4) - a_1^3(A_1, A_3, A_4)\,, \\ \alpha_2 &= a_2^1(A_1, A_2, A_3) + a_2^4(A_2, A_3, A_4)\,, \\ \alpha_3 &= -a_3^1(A_1, A_2, A_3) - a_3^4(A_2, A_3, A_4)\,, \\ \alpha_4 &= a_4^2(A_1, A_2, A_4) + a_4^3(A_1, A_3, A_4)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

P_3^* sei der zum P_3 duale Raum. In diesem Raume untersuchen wir das Koordinatentetraeder mit den Ecken α_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Für die infinitesimale Verrückung des Tetraders gilt dann:

$$\mathrm{d}\alpha_i = \Omega_i^k \alpha_k\,; \quad i, k = 1, 2, 3, 4\,. \tag{15}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (14), (15), (2) bekommen wir nach einer längeren Berechnung:

$$\begin{aligned} -\Omega_1^2 \Delta_2 &= a_3^4 \omega_4 \Delta_1\,, & -\Omega_1^3 \Delta_2 &= a_2^4 \omega_4 \Delta_1\,, \\ -\Omega_2^1 \Delta_1 &= a_4^3 \omega_3 \Delta_2\,, & -\Omega_2^3 \Delta_2 &= H_2 \omega_2 - \Delta_2 \sigma_2^3 \omega_3\,, \\ -\Omega_3^1 \Delta_1 &= a_4^2 \omega_2 \Delta_2\,, & \Omega_3^2 \Delta_2 &= H_3 \omega_3 + \Delta_2 \bar{\sigma}_3^2 \omega_2\,, \\ \Omega_4^1 \Delta_1 &= \Delta_1 \bar{\varrho}_4^1 \omega_1 + H_4 \omega_4\,, & -\Omega_4^2 \Delta_2 &= a_3^1 \Delta_1 \omega_1\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\Omega_1^4 \Delta_1 &= H_1 \omega_1 - \Delta_1 \varrho_1^4 \omega_4\,, \\ -\Omega_2^4 \Delta_1 &= a_1^3 \omega_3 \Delta_2\,, \\ -\Omega_3^4 \Delta_1 &= a_1^2 \omega_2 \Delta_2\,, \\ -\Omega_4^3 \Delta_2 &= a_2^1 \Delta_1 \omega_1\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Betrachten wir nun das Paar Q^* der Kongruenzen

$$L_1^* = (\alpha_1, \alpha_2), \quad L_2^* = (\alpha_4, \alpha_3).$$

Aus den Gleichungen (15), (16) folgt leicht:

$$\begin{aligned}(17)\qquad d(\alpha_1, \alpha_2) = {} & \omega_1 \left[-\frac{1}{\Delta_2} H_2 b_2^1(\alpha_1, \alpha_3) + \frac{1}{\Delta_1} H_1(\alpha_2, \alpha_4) \right] + \\ & + \omega_4 \left[+ \sigma_2^3 b_3^4(\alpha_1, \alpha_3) - \frac{\Delta_2}{\Delta_1} a_1^3 b_3^4(\alpha_1, \alpha_4) + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} a_2^4(\alpha_2, \alpha_3) - \varrho_1^4(\alpha_2, \alpha_4) \right] + E_1(\alpha_1, \alpha_4).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-d(\alpha_4, \alpha_3) = {} & \omega_1 \left[-\bar{\varrho}_4^1(\alpha_1, \alpha_3) - a_4^2 \frac{\Delta_2}{\Delta_1} b_2^1(\alpha_1, \alpha_4) + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} a_3^1(\alpha_2, \alpha_3) + \bar{\sigma}_3^2 b_2^1(\alpha_2, \alpha_4) \right] + \\ & + \omega_4 \left[-\frac{1}{\Delta_1} H_4(\alpha_1, \alpha_3) + \frac{1}{\Delta_2} H_3 b_3^4(\alpha_2, \alpha_4) \right] + E_2(\alpha_3, \alpha_4).\end{aligned}$$

Die Koeffizienten E_1, E_2 gebrauchen wir im Folgenden nicht.

Untersuchen wir den Fall, daß der Charakter des Rosenfeldschen Bildes des Paares Q^* kleiner als 5 ist.

Mit Hilfe der Gleichungen (17) bekommen wir folgende Bedingung:

$$(18)\qquad \left[\frac{1}{(\Delta_2)^2} H_2 H_3 b_2^1 b_3^4 - \frac{1}{(\Delta_1)^2} H_1 H_4 \right] (a_1^3 a_3^1 b_3^4 - a_2^4 a_4^2 b_2^1) = 0.$$

Satz 1. *Wenn P das Paar PT ist, dann sind die Charaktere der beiden einander entsprechenden Paare Q, Q^* kleiner als* 5.

Beweis. Die Behauptung des Satzes folgt aus den Gleichungen (9), (18).

Bemerkung. Die durch α_1 gebildete Mannigfaltigkeit (α_1) zerfällt nur in dem Falle, wenn $H_1 = 0$ gilt. Das folgt aus den Gleichungen (16), (3). Ähnliche Sätze bekommt man für die Mannigfaltigkeiten (α_2), (α_3), (α_4).

d) Im Folgenden werden wir die Punktabwicklung der Kongruenzen Γ_1, Γ_2

betrachten. Wir wählen ein neues Koordinatensystem mit den Eckpunkten $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, $\tilde{A}_3$, $\tilde{A}_4$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_1 &= A_1\,, \quad \tilde{A}_4 = A_4\,, \\
\tilde{A}_2 &= a_1^2 A_2 + a_1^3 A_3 + \varrho_1^4 A_4\,, \\
\tilde{A}_3 &= a_4^2 A_2 + a_4^3 A_3 + \bar{\varrho}_4^1 A_1\,.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Der Punkt $\tilde{A}_2$ liegt immer auf der zur Gleichung $\omega_4 = 0$ gehörigen Tangente der Fläche (A_1), ebenso liegt der Punkt $\tilde{A}_3$ immer auf der zur Gleichung $\omega_1 = 0$ gehörigen Tangente der Fläche (A_4).

Wenn wir mit $\tilde{\omega}_i^k$ die Komponenten der differentiellen Verrückung des Tetraeders bezeichnen, dann gilt:

$$
\mathrm{d}\tilde{A}_i = \tilde{\omega}_i^k \tilde{A}_k\,; \quad i, k = 1, 2, 3, 4\,. \tag{20}
$$

Aus den Gleichungen (19), (20) folgt dann:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\omega}_1^1 = \omega_1^1\,, \quad \tilde{\omega}_1^2 = \omega_1\,, \quad \tilde{\omega}_1^3 = 0\,, \quad \tilde{\omega}_1^4 = \bar{\varrho}_1^4 \omega_4\,, \\
&\tilde{\omega}_4^1 = \varrho_4^1 \omega_1\,, \quad \tilde{\omega}_4^2 = 0\,, \quad \tilde{\omega}_4^3 = \omega_4\,, \quad \tilde{\omega}_4^4 = \omega_4^4\,.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Wir wählen ein weiteres Koordinatensystem mit den Eckpunkten $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$, $\hat{A}_4$.

$$
\begin{aligned}
\hat{A}_2 &= A_2\,, \quad \hat{A}_3 = A_3\,, \\
\hat{A}_1 &= a_2^1 A_1 + a_2^4 A_4 + \sigma_2^3 A_3\,, \\
\hat{A}_4 &= a_3^1 A_1 + a_3^4 A_4 + \bar{\sigma}_3^2 A_2\,.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Die Wahl der Koordinateneckpunkte ist ähnlich wie in den Gleichungen (19).

Mit $\hat{\omega}_i^k$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, bezeichnen wir die Komponenten der differentiellen Verrückung des Tetraeders, es gilt dann:

$$
\mathrm{d}\hat{A}_i = \hat{\omega}_i^k \hat{A}_k\,; \quad i, k = 1, 2, 3, 4\,. \tag{23}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
&\hat{\omega}_2^1 = \omega_2\,, \quad \hat{\omega}_2^2 = \omega_2^2\,, \quad \hat{\omega}_2^3 = \bar{\sigma}_2^3 \omega_3\,, \quad \hat{\omega}_2^4 = 0\,, \\
&\hat{\omega}_3^1 = 0\,, \quad \hat{\omega}_3^2 = \sigma_3^2 \omega_2\,, \quad \hat{\omega}_3^3 = \omega_3^3\,, \quad \hat{\omega}_3^4 = \omega_3\,.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Satz 2. *Die Korrespondenz C ist genau dann die Punktabwicklung der Kongruenzen Γ_1, Γ_2, wenn Γ_1, Γ_2 ein PD-Paar bilden.*

Beweis. Zu jedem Geradenpaare p_1, p_2 knüpfen wir die Kollineation $\pi : p_1 \to p_2$ durch die Relationen:

$$
\pi\tilde{A}_1 = \tau_1 \hat{A}_2 + \bar{\tau}_1 \hat{A}_3\,, \quad \pi\tilde{A}_4 = \bar{\tau}_4 \hat{A}_2 + \tau_4 \hat{A}_3\,, \quad \tau_1\tau_4 - \bar{\tau}_1\bar{\tau}_4 \neq 0
$$

an. Alle diese Kollineationen bilden die Korrespondenz $C^b : V_3(\Gamma_1) \to V_3(\Gamma_2)$. Für jedes Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ bilden wir die Kollineation $K(u, v) : P_3 \to P_3$ durch folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(25)\qquad & K\tilde{A}_1 = \tau_1 \hat{A}_2 + \bar{\tau}_1 \hat{A}_3\,, \quad K\tilde{A}_4 = \bar{\tau}_4 \hat{A}_2 + \tau_4 \hat{A}_3\,,\\
& K\tilde{A}_2 = c_{21}\hat{A}_1 + c_{22}\hat{A}_2 + c_{23}\hat{A}_3 + c_{24}\hat{A}_4\,,\\
& K\tilde{A}_3 = c_{31}\hat{A}_1 + c_{32}\hat{A}_2 + c_{33}\hat{A}_3 + c_{34}\hat{A}_4\,, \quad c_{21}c_{34} - c_{31}c_{24} \neq 0\,.
\end{aligned}
$$

C ist gerade dann die Punktabwicklung (Švec [3], S. 14), wenn man zur C^b für jedes Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ die Kollineation $K(u, v)$ mit folgenden Eigenschaften finden kann: Sei $A \in p_1(u, v)$, $A = x_1\tilde{A}_1 + x_4\tilde{A}_4$ der beliebige Punkt und γ die durch ihn gehende beliebige Kurve von $V_3(\Gamma_1)$, dann haben die Kurven $C^b\gamma$, $K(u, v)\,\gamma$ die analytische Berührung erster Ordnung im Punkte C^bA. Es gilt:

$$K\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}(C^bA) + \Theta\, C^bA \quad (\Theta \text{ ist die Pfaffsche Form})\,.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (19), (21), (22), (24) bekommen wir folgende Bedingungen für die Punktabwicklung:

$$
\begin{aligned}
(26\mathrm{a})\qquad & c_{31} = c_{24} = 0\,, \quad c_{21} = \tau_1 b_2^1\,, \quad c_{34} = \tau_4 b_3^4\,, \quad c_{23} = c_{32} = 0\,,\\
& \bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_4 = 0\,,\\
(26\mathrm{b})\qquad & \varrho_4^1\tau_1 - \sigma_3^2\tau_4 b_2^1 = 0\,, \quad -\bar{\sigma}_2^3\tau_1 b_3^4 + \bar{\varrho}_1^4\tau_4 = 0\,,\\
(26\mathrm{c})\qquad & \tau_1\tau_4(\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4) + \tau_4 c_{22}\omega_1 - \tau_1 c_{33}\omega_4 -\\
& - \tau_4\,\mathrm{d}\tau_1 + \tau_1\,\mathrm{d}\tau_4 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Die nichttriviale Lösung der Gleichungen (26b) für die Unbekannten τ_1, τ_4 existiert nur dann, wenn (10) gilt. Aus den Gleichungen (21), (24), (26b) bekommen wir dann:

$$\tau_1\tilde{\omega}_4^1 = \tau_4\hat{\omega}_3^2\,.$$

Durch die äußere Differentiation und mit Hilfe des Cartanschen Lemmas folgt, daß

$$\tau_1\tau_4(\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4) - \tau_4\,\mathrm{d}\tau_1 + \tau_1\,\mathrm{d}\tau_4$$

die Hauptform ist. Aus den Gleichungen (26c) bekommen wir dann die Größen c_{22}, c_{33}.

Satz 3. *Wenn $C : \Gamma_1(p_1) \to \Gamma_2(p_2)$ die Ebeneabwicklung der Kongruenzen Γ_1, Γ_2 ist, dann ist der Charakter des Rosenfeldschen Bildes des Paares Q^* kleiner als* 5.

Der Beweis des Satzes ist ähnlich wie im Satze 2. Man muß aus den Gleichungen (14) ausgehen. Die notwendige und hinreichende Bedingung der Ebeneabwicklung der Kongruenzen Γ_1, Γ_2 ist die Gültigkeit der Relation:

$$\frac{1}{(\Delta_2)^2} H_2 H_3 b_2^1 b_3^4 - \frac{1}{(\Delta_1)^2} H_1 H_4 = 0 .$$

Wenn $C : \Gamma_1(p_1) \to \Gamma_2(p_2)$ die projektive Abwicklung des zweiten Grades ist, dann sind die Charaktere der Rosenfeldschen Bilder der Paare Q, Q^* kleiner als 5. Das folgt aus den Sätzen 2, 3.

Literaturverzeichnis

[1] *С. П. Фиников:* Теория пар конгруэнций, Москва 1956.

[2] *Е. Т. Ивлев:* Канонический репер пари конгруэнций в трехмерном проективном пространстве, Труды гос. унив. Томск *160*, 1, 15—24 (1962).

[3] *A. Švec:* Projective differential geometry of line congruences, Praha 1965.

[4] *J. Vala:* Über die Torsalsysteme des Kongruenzenpaares (im Druck).

Anschrift des Verfassers: Brno, Barvičova 85, ČSSR (Vysoké učení technické).