

Bohuslav Diviš

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden (zweite Abhandlung)

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 20 (1970), No. 1, 149–159

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100954>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1970

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÜBER GITTERPUNKTE IN MEHRDIMENSIONALEN ELLIPSOIDEN  
(ZWEITE ABHANDLUNG)

BOHUSLAV DIVIŠ, Praha

(Eingelangt am 23. April 1969)

Es sei  $\sigma \geq 2$ , ganz; seien  $r_j \geq 1$ , ganz ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ),  $\alpha_j > 0$  ( $1 \leq j \leq \sigma$ ). In dieser Arbeit betrachten wir quadratische Formen der Gestalt

$$(1) \quad Q(u) = \sum_{j=1}^{\sigma} \alpha_j (u_{1,j}^2 + u_{2,j}^2 + \dots + u_{r_j,j}^2).$$

Mit  $V_Q(x)$  bezeichnen wir den Inhalt des Ellipsoids  $Q(u) \leq x$ , mit  $A_Q(x)$  dann die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid  $Q(u) \leq x$ , d. h.

$$A_Q(x) = \sum_{Q(u) \leq x} 1.$$

Schließlich setzen wir

$$P_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x).$$

Der Verlauf von  $P_Q(x)$  war schon Gegenstand mehrerer Untersuchungen. In einer früheren Arbeit (vgl. [5]) haben wir eine ziemlich ausführliche Einleitung in diese Problematik veröffentlicht, wofür wir hier nur einige Ergebnisse erwähnen, die sich unmittelbar auf die vorliegende Arbeit beziehen. Wir setzen  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_\sigma$ . Dann ist folgendes bekannt:

I. Für fast alle positiven Wertsysteme  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\sigma)$  (im Sinne des Lebesgueschen Maßbegriffes) und für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$(2) \quad P_Q(x) = O \left( \exp \left\{ \left( \frac{r}{2} - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\sigma} \text{Min}(r_j, 4) + \varepsilon \right) \lg x \right\} \right)$$

für die Formen der Gestalt (1) mit  $r_1 + r_2 + \dots + r_\sigma > 4$  (vgl. [1]).

Für weitere Zwecke führen wir noch eine Bezeichnung ein. Sei  $k \geq 1$ , ganz, und  $\delta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) seien reell. Wir bezeichnen mit  $\beta(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$  die obere

Grenze derjenigen  $\omega$ , für welche das System der Ungleichungen

$$\left| \delta_j - \frac{p_j}{q} \right| < \frac{1}{q^\omega} \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

unendlich viele Lösungen mit ganzzahligen  $(k + 1)$ -Tupeln  $\{p_{1n}, p_{2n}, \dots, p_{kn}; q_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $q_n \rightarrow +\infty$  hat. Jetzt ist folgendes bekannt (vgl. [4]):

II. Es sei  $\sigma \geq 3$ ,  $\beta(\alpha_2/\alpha_1) = 2$ . Dann gilt für fast alle positiven Wertssysteme  $(\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_\sigma)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  die Formel (2), für die Formen der Gestalt (1).

In dieser Abhandlung beweisen wir folgenden

**Satz 1.** *Es sei  $\sigma \geq 3$ , ganz; seien  $r_j$  ganz ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ),  $r = r_1 + r_2 + \dots + r_\sigma$ . Weiter sei  $\tau$  ganz,  $3 \leq \tau \leq \sigma$ ;  $\alpha_j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, \tau - 1$ ). Wir setzen  $\beta(\alpha_2/\alpha_1, \alpha_3/\alpha_1, \dots, \alpha_{\tau-1}/\alpha_1) = \beta$ . Sei  $r_j \geq 2\beta/(\beta - 1)$  ( $j = 1, 2, \dots, \tau - 1$ ),  $r_j \geq 4$  ( $j = \tau, \dots, \sigma$ ). Dann gilt für fast alle positiven Wertssysteme  $(\alpha_\tau, \alpha_{\tau+1}, \dots, \alpha_\sigma)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$*

$$(3) \quad P_Q(x) = O(x^{r/2 - 1 - 1/(\beta - 1) - (\sigma + 1 - \tau) + \varepsilon})$$

für die Formen der Gestalt (1). Für  $\beta = +\infty$  setzen wir dabei  $1/(\beta - 1) = 0$ ,  $2\beta/(\beta - 1) = 2$ .

Die zum Beweis benutzte Methode wurde von V. JARNÍK (vgl. [4]) übernommen. Zunächst beweisen wir zwei Hilfssätze. Im folgenden seien die Zahlen  $a > 0$ ,  $\tau$  ganz,  $3 \leq \tau \leq \sigma$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\tau-1}$ ,  $\alpha_j > 0$  ( $1 \leq j \leq \tau - 1$ ),  $C, D$ ,  $0 < C < \text{Min}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\tau-1})$ ,  $D > \text{Max}(\alpha_1, \dots, \alpha_{\tau-1})$ ,  $\varepsilon > 0$  gegeben. Mit  $c$ , meistens ohne Indizes, bezeichnen wir unterschiedslos positive Zahlen, die nur von  $\sigma, \tau, \alpha_1, \dots, \alpha_{\tau-1}, a, C, D, \varepsilon$  abhängen (so daß z. B.  $c^2 + 5c = c$  ist). Mit  $\mu$  bezeichnen wir unterschiedslos komplexe Funktionen irgendwelcher Veränderlichen, welche dem Betrage nach höchstens 1 sind.

Wir betrachten ganzzahlige Systeme

$$(4) \quad \{h_1, \dots, h_\sigma; k_1, \dots, k_\sigma; n_1, \dots, n_\sigma; \varrho\} = \{h, k, n, \varrho\},$$

$\varrho > 0$ ,  $h_j > 0$ ,  $n_j \geq 0$ ,  $0 < k_j \leq 2^{e+1}$ . Für jedes solche System sei

$$(5) \quad M(h, k, n, \varrho)$$

die Menge aller Punkte  $\alpha = (\alpha_\tau, \alpha_{\tau+1}, \dots, \alpha_\sigma)$  des Würfels

$$C < \alpha_j < D \quad (\tau \leq j \leq \sigma),$$

zu welchen es wenigstens ein reelles  $t$  gibt, so daß

$$(6) \quad \left| t - \frac{2\pi h_j}{\alpha_j k_j} \right| < \frac{a}{k_j \cdot 2^{n_j + \varrho}} \quad (j = 1, 2, \dots, \sigma)$$

ist. Wenn  $l, m_1, m_2, \dots, m_\sigma$  ganze nichtnegative Zahlen sind mit  $m_j \leq \varrho$ , sagen wir, das System (4) und genau so die Menge (5) gehört zur Klasse

$$(7) \quad K(l, m_1, \dots, m_\sigma, n_1, \dots, n_\sigma) = K(l, m, n, \varrho),$$

als  $2^l \leq h_1 < 2^{l+1}$ ,  $2^{m_j} \leq k_j < 2^{m_j+1}$  ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ) ist. Für jedes  $\alpha = (\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$  sei

$$(8) \quad N(l, m, n, \varrho, \alpha)$$

die Anzahl derjenigen Mengen (5) der Klasse (7), welche den Punkt  $\alpha = (\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$  enthalten. Unser Ziel ist eine Abschätzung der Anzahl (8) zu finden, welche für fast alle  $\alpha = (\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$  unseres Würfels  $C < \alpha_j < D$  gelten würde. Dabei beschränken wir uns nur auf solche Klassen (7), für welche

$$(9) \quad m_1 + n_1 \geq m_2 + n_2 \geq \dots \geq m_{\tau-1} + n_{\tau-1},$$

$$(10) \quad m_\tau + n_\tau \geq m_{\tau+1} + n_{\tau+1} \geq \dots \geq m_\sigma + n_\sigma$$

gilt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$$\text{A. } m_1 + n_1 \geq m_\tau + n_\tau; \quad \text{B. } m_1 + n_1 < m_\tau + n_\tau.$$

Fall A. Soll ein Punkt  $\alpha = (\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$  in der Menge (5) der Klasse (7) liegen, so muß

$$(11) \quad \left| \frac{1}{\alpha_1} \frac{h_1}{k_1} - \frac{1}{\alpha_j} \frac{h_j}{k_j} \right| < \frac{c}{2^{m_j+n_j+\varrho}} \quad (j = 2, \dots, \sigma)$$

sein. Daraus folgt

$$(12) \quad c \cdot 2^{l-m_1} > \frac{h_j}{k_j} < c \cdot 2^{l-m_1} \quad \text{für } \varrho > c_1.$$

Weiter sei immer  $\varrho > c_1$ . Für die Anzahl  $\nu$  der Lösungen des Systems von Ungleichungen

$$(13) \quad \left| \frac{1}{\alpha_1} \frac{h_1}{k_1} - \frac{1}{\alpha_j} \frac{h_j}{k_j} \right| < \frac{c}{2^{m_j+n_j+\varrho}} \quad (j = 2, \dots, \tau-1)$$

mit ganzzahligen  $2(\tau-1)$ -Tupeln  $(h_1, \dots, h_{\tau-1}, k_1, \dots, k_{\tau-1})$ , welche überdies alle bisher eingeführten Bedingungen erfüllen, haben wir nach dem Hilfssatz 2 der Abhandlung [6] die Formel

$$(14) \quad \nu = \mu c \cdot 2^{(l+m_2+\dots+m_{\tau-1})(1+\varepsilon)+(m_1+\dots+m_{\tau-2}-n_{\tau-1}-\varrho)(\gamma-1)},$$

als  $\gamma > \beta(\alpha_2/\alpha_1, \dots, \alpha_{\tau-1}/\alpha_1)$  ist.

Für jedes solche  $2(\tau - 1)$ -Tupel und für beliebig gegebene  $h_\tau, k_\tau, \dots, h_\sigma, k_\sigma$  mit  $2^{m_j} \leq k_j < 2^{m_j+1}$  hat die Menge der Punkte  $\alpha = (\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$  des Würfels  $C < \alpha_j < D$  ( $j = \tau, \dots, \sigma$ ), welche die Ungleichungen (11) für  $j = \tau, \dots, \sigma$  erfüllen, das Maß

$$(15) \quad \mu c \prod_{j=\tau}^{\sigma} 2^{m_1 - m_j - n_j - e - l}.$$

Dabei ist nach (12)  $h_j < c \cdot 2^{l+m_j-m_1}$ . Die Summe der Maße aller nichtleeren Mengen (5) der Klasse (7) ist also gleich dem Produkt von (14), (15) und  $\mu c \prod_{j=\tau}^{\sigma} 2^{l+2m_j-m_1}$ , d. h. gleich  $\mu c F(l, m, n, \varrho)$ , wo

$$(16) \quad F(l, m, n, \varrho) = 2^{(l+m_2+\dots+m_{\tau-1})(1+\varepsilon)+(m_1+\dots+m_{\sigma-2}-n_{\tau-1}-e)/(\gamma-1)} \prod_{j=\tau}^{\sigma} 2^{m_j-n_j-e}$$

ist. Das Maß der Menge derjenigen  $\alpha = (\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$ , für welche

$$(17) \quad N(l, m, n, \varrho, \alpha) > F(l, m, n, \varrho) \cdot 2^{\varepsilon(l+m_1+\dots+m_\sigma+n_1+\dots+n_\sigma+e)}$$

ist, ist also gleich

$$\mu c \cdot 2^{-\varepsilon(l+m_1+\dots+m_\sigma+n_1+\dots+n_\sigma+e)}.$$

Summieren wir diesen Ausdruck über  $l, m_1, \dots, m_\sigma, n_1, \dots, n_\sigma$ , so bekommen wir eine konvergente Reihe. Es gilt also: die Menge derjenigen Punkte  $\alpha$ , für welche die Ungleichung (17) für unendlich viele Klassen  $K(l, m, n, \varrho)$  gilt, hat das Maß Null. Daraus folgt

**Hilfssatz 1.** *Fast alle Punkte  $\alpha = (\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$  des Würfels  $C < \alpha_j < D$  haben folgende Eigenschaft: Es gibt (von  $\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma$  abhängig) eine Zahl  $\varrho_0 > 0$ , so daß für alle Klassen  $K(l, m, n, \varrho)$  des Falles A für  $\varrho > \varrho_0$  folgende Ungleichung gilt:*

$$(18) \quad N(l, m, n, \varrho, \alpha) \leq F(l, n, m, \varrho) \cdot 2^{\varepsilon(l+m_1+\dots+m_\sigma+n_1+\dots+n_\sigma+e)}.$$

Fall B. Soll ein Punkt  $\alpha = (\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$  in der Menge (5) der Klasse (7) im Falle B liegen, so muß wegen (6), (9) wieder (13) erfüllt sein. Die Anzahl der zugehörigen  $2(\tau - 1)$ -Tupel  $(h_1, k_1, \dots, h_{\tau-1}, k_{\tau-1})$  ist wieder gleich (14). Für jedes solche  $2(\tau - 1)$ -Tupel muß weiter

$$\left| \frac{1}{\alpha_\tau} \frac{h_\tau}{k_\tau} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{h_1}{k_1} \right| < c \cdot 2^{-m_1-n_1-e}$$

sein, was bei gegebenen  $h_\tau, k_\tau$  für  $\alpha_\tau$  ein Intervall der Länge  $\mu c \cdot 2^{-l-n_1-e}$  gibt. Bei festem  $\alpha_\tau$  und festen  $h_\tau, k_\tau, \dots, h_\sigma, k_\sigma$  muß weiter (bei  $\sigma > \tau$ ) gelten:

$$\left| \frac{1}{\alpha_j} \frac{h_j}{k_j} - \frac{1}{\alpha_\tau} \frac{h_\tau}{k_\tau} \right| < c \cdot 2^{-m_j-n_j-e} \quad (j = \tau + 1, \dots, \sigma),$$

was ein  $(\sigma - \tau)$ -dimensionales Intervall ergibt, dessen Inhalt  $\mu c \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} 2^{m_1 - m_j - n_j - e - l}$  ist (vgl. (12)). Weil die Anzahl der zugehörigen Systeme  $(h_{\tau}, k_{\tau}, \dots, h_{\sigma}, k_{\sigma})$  gleich  $\mu c \prod_{j=\tau}^{\sigma} 2^{2m_j + l - m_1}$  ist, ist die Summe der Maße aller nichtleeren Mengen (5) der Klasse (7) gleich  $\mu c G(l, m, n, \varrho)$ , wo

$$(19) \quad G(l, m, n, \varrho) = 2^{(l+m_2+\dots+m_{\tau-1})(1+e)+(m_1+\dots+m_{\tau-2}-n_{\tau-1}-\varrho)(\gamma-1)} \times \\ \times 2^{2m_{\tau}-m_1-n_1-e} \prod_{j=\tau+1}^{\sigma} 2^{m_j-n_j-e}$$

ist. Daraus folgt ähnlich wie im Falle A

**Hilfssatz 2.** Fast alle Punkte  $\alpha = (\alpha_{\tau}, \dots, \alpha_{\sigma})$  des Würfels  $C < \alpha_j < D$  haben folgende Eigenschaft: Es gibt (von  $\alpha_{\tau}, \dots, \alpha_{\sigma}$  abhängig) eine Zahl  $\varrho_0 > 0$ , so daß für alle Klassen  $K(l, m, n, \varrho)$  des Falles B mit  $\varrho > \varrho_0$  die Ungleichung

$$(20) \quad N(l, m, n, \varrho, \alpha) \leq G(l, m, n, \varrho) \cdot 2^{e(l+m_1+\dots+m_{\sigma}+n_1+\dots+n_{\sigma}+e)}$$

gilt.

Bemerken wir, daß

$$(21) \quad G(l, m, n, \varrho) \cdot 2^{-m_{\tau}-n_{\tau}} = F(l, m, n, \varrho) \cdot 2^{-m_1-n_1}$$

ist.

Beweis des Satzes 1. Wir wählen  $2^e \leq \sqrt{x} < 2^{e+1}$  und sei  $\beta < +\infty$ ,  $\beta < \gamma < +\infty$ . Wir setzen

$$(22) \quad \theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 s} \quad \text{für} \quad \operatorname{Re} s > 0, \\ A = \operatorname{Max}_{1 \leq j \leq \sigma} \frac{2\pi}{\alpha_j}, \quad z = x^{-r/4}, \quad s = \frac{1}{x} + it \quad (t \text{ reell}).$$

Dann gilt (vgl. [3], § 2)

$$(23) \quad P_{\varrho}(x) = O \left( x^{r/4} + x^{r/2-1} z + \frac{1}{z} \int_{A/\sqrt{x}}^{\infty} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \dots \theta^{r_{\sigma}}(\alpha_{\sigma} s)| \operatorname{Min}(1, tz) \frac{dt}{t^2} \right).$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß unter unseren Voraussetzungen stets  $r/2 - 1 - 1/(\beta - 1) - (\sigma + 1 - \tau) \geq r/4$  ist. Es ist nämlich immer  $\beta \geq (\tau - 1)/(\tau - 2) > 1$ ,  $\tau \geq 3$  und damit also  $r/2 - 1 - 1/(\beta - 1) - (\sigma + 1 - \tau) \geq r/4 + \frac{1}{4}((\tau - 1) 2\beta/(\beta - 1) + 4(\sigma - \tau + 1)) - 1 - 1/(\beta - 1) - (\sigma + 1 - \tau) = r/4 + \frac{1}{2}((\tau - 1) \beta/(\beta - 1)) - \beta/(\beta - 1) = r/4 + \frac{1}{2}(\beta/(\beta - 1))(\tau - 3) \geq r/4$  ist.

Daraus folgt, daß es folgendes zu beweisen genügt: für jedes  $\varepsilon > 0$  ist

$$(24) \quad \frac{1}{z} \int_{A/\sqrt{x}}^{\infty} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \dots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)| \operatorname{Min}(1, tz) \frac{dt}{t^2} = O(x^{r/2 - 1 - 1/(\gamma-1) - (\sigma+1-\tau) + \varepsilon})$$

für fast alle  $\alpha = (\alpha_s, \dots, \alpha_\sigma)$  ( $s = 1/x + it$ ). Wir legen jetzt bei gegebenem  $x > 1$  auf das Intervall  $-\infty < t < +\infty$  alle Farey-Brüche  $h/k$ , wobei  $h \geq 0$ ,  $0 < k \leq \sqrt{x}$ ,  $(h, k) = 1$  und konstruieren noch ihre Medianten, d. h. alle Zahlen  $(h + \bar{h})/(k + \bar{k})$ , wo  $h/k, \bar{h}/\bar{k}$  zwei benachbarte unter unseren Farey-Brüchen sind. Wir bezeichnen mit  $B_{h,k}$  das linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, dessen Endpunkte zwei benachbarte Medianten sind, und welches den Punkt  $h/k$  enthält. Diese Intervalle überdecken dann lückenlos die ganze reelle Achse und sind paarweise punktfremd. Jetzt ist folgendes bekannt (vgl. [2]): Wenn  $t$  im Intervall  $(2\pi/\alpha_j) B_{h,k}$  liegt, dann ist<sup>1)</sup>

$$(25) \quad |\theta(\alpha_j s)| < \frac{d}{\sqrt{k}} \operatorname{Min} \left( \sqrt{x}, \frac{1}{\left| t - \frac{2\pi h}{\alpha_j k} \right|} \right) \left( \operatorname{Min} \left( a, \frac{1}{0} \right) = a \right)^2$$

Bekanntlich ist weiter

$$(26) \quad B_{h,k} \subset \left\langle \frac{h}{k} - \frac{1}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{1}{k\sqrt{x}} \right\rangle.$$

Zu jedem  $t$  unseres Integrationsintervalles  $\langle A/\sqrt{x}, \infty \rangle$  gibt es jetzt eindeutig  $2\sigma$  Zahlen  $h_1, k_1, \dots, h_\sigma, k_\sigma$ , so daß  $t$  im Durchschnitt der  $\sigma$  Intervalle  $(2\pi/\alpha_1) B_{h_1, k_1}, \dots, (2\pi/\alpha_\sigma) B_{h_\sigma, k_\sigma}$  liegt. Wenn  $t$  im Durchschnitt der Intervalle  $(2\pi/\alpha_1) B_{h_1, k_1}, \dots, (2\pi/\alpha_\sigma) B_{h_\sigma, k_\sigma}$  liegt, dann gibt es nach (26) genau ein System der ganzen nicht-negativen Zahlen  $(n_1, n_2, \dots, n_\sigma)$ , so daß

$$(27) \quad \frac{1}{2^{n_j+1} k_j \sqrt{x}} < \left| \frac{\alpha_j}{2\pi} t - \frac{h_j}{k_j} \right| \leq \frac{1}{2^{n_j} k_j \sqrt{x}} \quad (j = 1, 2, \dots, \sigma)$$

ist, mit Ausnahme der Punkte  $t = 2\pi h_j/\alpha_j k_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ). Wir definieren jetzt abzählbar viele Mengen  $\mathfrak{M}(h, k, n) = \mathfrak{M}(h_1, k_1, n_1; \dots; h_\sigma, k_\sigma, n_\sigma)$  folgenderweise: wenn  $h_1, \dots, h_\sigma, k_1, \dots, k_\sigma, n_1, \dots, n_\sigma$  ganze Zahlen sind, so daß  $h_j > 0$ ,  $0 < k_j \leq \sqrt{x}$ ,  $(h_j, k_j) = 1$ ,  $n_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ), sei  $\mathfrak{M}(h, k, n)$  Menge derjenigen  $t$ , welche im Durchschnitt der Intervalle  $(2\pi/\alpha_j) B_{h_j, k_j}$  ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ),  $\langle A/\sqrt{x}, \infty \rangle$  liegen und die Ungleichungen (27) erfüllen. Die Mengen  $\mathfrak{M}(h, k, n)$  sind paarweise disjunkt und überdecken das ganze Intervall  $\langle A/\sqrt{x}, \infty \rangle$  mit Ausnahme abzählbar vieler Punkte  $t = 2\pi h_j/\alpha_j k_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ).

<sup>1)</sup> Wenn  $I = \langle a_1, a_2 \rangle$  und  $a_3 > 0$ , dann bedeute  $a_3 I$  das Intervall  $\langle a_1 a_3, a_2 a_3 \rangle$ .

<sup>2)</sup> Mit  $d$  bezeichnen wir unterschiedslos positive Konstanten, welche nur von  $\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\sigma, r_1, r_2, \dots, r_\sigma, \gamma$  abhängen.

Um (24) zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß für jedes  $\varepsilon > 0$  (es genügt hinreichend klein)

$$(28) \quad \sum_{\substack{h_1, k_1, n_1 \\ \vdots \\ h_\sigma, k_\sigma, n_\sigma}} \int_{\mathfrak{M}(h, k, n)} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \dots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)| \operatorname{Min} \left( \frac{1}{tz}, 1 \right) \frac{dt}{t} = \\ = O(x^{r/2 - 1 - 1/(\gamma - 1) - (\sigma + 1 - \tau) + \varepsilon(3r/4 + \sigma + \tau/2)})$$

mit  $s = 1/x + it$  für fast alle  $\alpha = (\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$  ist. Aus Symmetriegründen beschränken wir uns dabei auf jene  $\mathfrak{M}(h, k, n)$ , für welche

$$(29) \quad 2^{n_1} k_1 \geq 2^{n_2} k_2 \geq \dots \geq 2^{n_{\tau-1}} k_{\tau-1},$$

$$(30) \quad 2^{n_\tau} k_\tau \geq 2^{n_{\tau+1}} k_{\tau+1} \geq \dots \geq 2^{n_\sigma} k_\sigma$$

gilt. Diese Mengen  $\mathfrak{M}(h, k, n)$  werden wir weiter folgendermaßen klassifizieren. Wir sagen, daß die Menge  $\mathfrak{M}(h, k, n)$  zur Klasse  $\mathfrak{R}(l, m, n) = \mathfrak{R}(l; m_1, n_1; \dots; m_\sigma, n_\sigma)$  ( $l, m_j, n_j$  ganz, nichtnegativ) gehört, wenn  $2^l \leq h_1 < 2^{l+1}$ ,  $2^{m_j} \leq k_j < 2^{m_j+1}$  ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ) ist. Jede Menge  $\mathfrak{M}(h, k, n)$  gehört genau zu einer Klasse  $\mathfrak{R}(l, m, n)$ . Dabei können wir uns auf jene  $\mathfrak{R}(l, m, n)$  beschränken, für welche  $2^{m_j} \leq \sqrt{x}$  ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ) ist. Wir bemerken noch:

1. Ist  $\mathfrak{M}(h, k, n)$  eine nichtleere Menge der Klasse  $\mathfrak{R}(l, m, n)$ , dann ist ihr Maß im Falle A höchstens gleich  $c/2^{m_1+n_1} \sqrt{x}$ , im Falle B höchstens gleich  $c/2^{m_\tau+n_\tau} \sqrt{x}$ .

2. Ist  $t \in \mathfrak{M}(h, k, n)$  der Klasse  $\mathfrak{R}(l, m, n)$ , dann ist nach (25)

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{2^{m_j}}} \operatorname{Min} (\sqrt{x}, \sqrt{2^{m_j+n_j}} \sqrt[4]{x}) \quad (j = 1, 2, \dots, \sigma).$$

3. Ist  $t \in \mathfrak{M}(h, k, n)$  der Klasse  $\mathfrak{R}(l, m, n)$ , dann ist  $c \cdot 2^{l-m_1} < t < c \cdot 2^{l-m_1}$  für  $x > c$ .

4. Ist die Menge  $\mathfrak{M}(h, k, n)$  nichtleer, dann gibt es ein reelles  $t$ , für welches (6) mit  $a = 2\pi/C$  gilt, d. h. bei dieser Wahl von  $a$  ist  $\alpha \in M(h, k, n, \varrho)$ , so daß die Anzahl der nichtleeren Mengen  $\mathfrak{M}(h, k, n)$  der Klasse  $\mathfrak{R}(l, m, n)$  gleich  $N(l, m, n, \varrho, \alpha)$  ist. Nach den Hilfssätzen 1,2 ist für fast alle Punkte  $\alpha = (\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$  des Würfels  $C < \alpha_j < D$  die Ungleichung (18) bzw. (20) erfüllt, sobald  $\varrho$ , also  $x$  hinreichend groß ist. Wir wählen ein solches  $\alpha$ .

Es sei jetzt  $\varepsilon$  mit

$$0 < \varepsilon < \operatorname{Min} \left( \frac{1}{\tau + 1}, \operatorname{Min}_{1 \leq j \leq \tau-1} \frac{1}{6} \left( r_j - \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \right), \frac{1}{\gamma - 1} \right)$$

gegeben, und wir untersuchen das Integral in (28). Zunächst schätzen wir

$$(31) \quad \operatorname{Min} \left( \frac{1}{tz}, 1 \right) \leq \left( \frac{1}{tz} \right)^{3\varepsilon} = x^{3r\varepsilon/4} \frac{1}{t^{3\varepsilon}} \quad \text{für } \varepsilon < \frac{1}{3}.$$



Weiter schätzen wir (vgl. die Bemerkungen 1. – 4.):

$$(32) \quad \sum_{h_j, k_j, n_j} \int_{\mathfrak{M}(h, k, n)} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \dots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)| \frac{dt}{t^{1+3\varepsilon}} \leq d(\varepsilon) \sum \frac{2^{m_1(1+3\varepsilon)}}{2^{(1+3\varepsilon)}} 2^{-m_\tau - n_\tau} x^{-1/2} \times \\ \times \prod_{j=1}^{\sigma} \frac{x^{r_j/4}}{2^{m_j r_j/2}} \text{Min}(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}) G(l, m, n, \varrho) 2^{\varepsilon(l+m_1+\dots+m_\sigma+n_1+\dots+n_\sigma+\varrho)} \text{ }^3)$$

sowohl im Falle A, als auch im Falle B (vgl. (21)). Dabei ist über solche  $l, m_j, n_j$  zu summieren, für welche gilt:  $l \geq 0, n_j \geq 0, m_j \geq 0, 2^{m_j} \leq \sqrt{x}$  ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ),  $m_1 + n_1 \geq m_2 + n_2 \geq \dots \geq m_{\tau-1} + n_{\tau-1}, m_\tau + n_\tau \geq m_{\tau+1} + n_{\tau+1} \geq \dots \geq m_\sigma + n_\sigma$ . Weiter ist noch  $2^\varrho \leq \sqrt{x} < 2^{\varrho+1}$ . Der Ausdruck (32) ist also höchstens gleich

$$(33) \quad d(\varepsilon) x^{r/4 - \gamma/2(\gamma-1) - (\sigma - \tau + 1)/2 + \varepsilon/2} \sum_{m_1, n_1} 2^{m_1(-r_1/2 + 1/(\gamma-1) + 4\varepsilon) + n_1(-1 + \varepsilon)} \times \\ \times \text{Min}(x^{r_1/4}, 2^{m_1 r_1/2 + n_1 r_1/2}) \prod_{j=2}^{\tau-2} \sum_{m_j, n_j} 2^{m_j(-r_j/2 + \gamma/(\gamma-1) + 2\varepsilon) + n_j \varepsilon} \times \\ \times \text{Min}(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}) \sum_{m_{\tau-1}, n_{\tau-1}} 2^{m_{\tau-1}(-r_{\tau-1}/2 + 1 + 2\varepsilon) + n_{\tau-1}(-1/(\gamma-1) + \varepsilon)} \times \\ \times \text{Min}(x^{r_{\tau-1}/4}, 2^{m_{\tau-1} r_{\tau-1}/2 + n_{\tau-1} r_{\tau-1}/2}) \prod_{j=\tau}^{\sigma} \sum_{m_j, n_j} 2^{m_j(-r_j/2 + 1 + \varepsilon) + n_j(-1 + \varepsilon)} \times \\ \times \text{Min}(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}) \sum_1 2^{-l\varepsilon}.$$

Folglich bekommen wir für  $\tau \leq j \leq \sigma$ :

$$\sum_{2^{m_j + n_j} \leq \sqrt{x}} 2^{m_j(-r_j/2 + 1 + \varepsilon) + n_j(-1 + \varepsilon)} \text{Min}(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}) \leq \\ \leq d(\varepsilon) \sum_{2^{m_j + n_j} \leq \sqrt{x}} 2^{m_j(1 + \varepsilon) + n_j(r_j/2 - 1 + \varepsilon)} \leq d(\varepsilon) \sum_{2^{n_j} \leq \sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{n_j}}\right)^{1 + \varepsilon} 2^{n_j(r_j/2 - 1 + \varepsilon)} = \\ = d(\varepsilon) x^{1/2 + \varepsilon/2} \sum_{2^{n_j} \leq \sqrt{x}} 2^{n_j(r_j/2 - 2)} \leq d(\varepsilon) x^{r_j/4 - 1/2 + \varepsilon} \quad \text{für } r_j \geq 4. \\ \sum_{2^{m_j + n_j} > \sqrt{x}} 2^{m_j(-r_j/2 + 1 + \varepsilon) + n_j(-1 + \varepsilon)} \text{Min}(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}) \leq \\ \leq d(\varepsilon) x^{r_j/4} \sum_{2^{m_j} \leq \sqrt{x}} 2^{m_j(-r_j/2 + 1 + \varepsilon)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_j}}\right)^{\varepsilon-1} = d(\varepsilon) x^{r_j/4 - 1/2 + \varepsilon/2} \times \\ \times \sum_{2^{m_j} \leq \sqrt{x}} 2^{m_j(-r_j/2 + 2)} \leq d(\varepsilon) x^{r_j/4 - 1/2 + \varepsilon} \quad \text{für } r_j \geq 4.$$

<sup>3)</sup> Mit  $d(\varepsilon)$  bezeichnen wir unterschiedslos positive Konstanten, die nur von  $\sigma, \tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\sigma, r_1, \dots, r_\sigma, \gamma, \varepsilon$  abhängen.

Weiter schätzen wir die Summe über  $m_{\tau-1}, n_{\tau-1}$  in (33) ab:

$$\begin{aligned}
& \sum_{2^{m_{\tau-1}+n_{\tau-1}} \leq \sqrt{x}} 2^{m_{\tau-1}(1+2\varepsilon)+n_{\tau-1}(r_{\tau-1}/2-1/(\gamma-1)+\varepsilon)} \leq d(\varepsilon) \sum_{2^{n_{\tau-1}} \leq \sqrt{x}} \left( \frac{\sqrt{x}}{2^{n_{\tau-1}}} \right)^{1+2\varepsilon} \times \\
& \times 2^{n_{\tau-1}(r_{\tau-1}/2-1/(\gamma-1)+\varepsilon)} = d(\varepsilon) x^{1/2+\varepsilon} \sum_{2^{n_{\tau-1}} \leq \sqrt{x}} 2^{n_{\tau-1}(r_{\tau-1}/2-\gamma/(\gamma-1)-\varepsilon)} \leq \\
& \leq d(\varepsilon) x^{r_{\tau-1}/4-1/2(\gamma-1)+\varepsilon} \quad \text{für } r_{\tau-1} \geq \frac{2\beta}{\beta-1}. \\
& \sum_{2^{m_{\tau-1}+n_{\tau-1}} > \sqrt{x}} x^{r_{\tau-1}/4} 2^{m_{\tau-1}(-r_{\tau-1}/2+1+2\varepsilon)+n_{\tau-1}(\varepsilon-1/(\gamma-1))} \leq \\
& \leq d(\varepsilon) x^{r_{\tau-1}/4} \sum_{2^{m_{\tau-1}} \leq \sqrt{x}} 2^{m_{\tau-1}(-r_{\tau-1}/2+1+2\varepsilon)} \left( \frac{\sqrt{x}}{2^{m_{\tau-1}}} \right)^{\varepsilon-1/(\gamma-1)} \leq \\
& \leq d(\varepsilon) x^{r_{\tau-1}/4-1/2(\gamma-1)+\varepsilon/2} \sum_{2^{m_{\tau-1}} \leq \sqrt{x}} 2^{m_{\tau-1}(-r_{\tau-1}/2+\gamma/(\gamma-1)+\varepsilon)} \leq \\
& \leq d(\varepsilon) x^{r_{\tau-1}/4-1/2(\gamma-1)+\varepsilon} \quad \text{für } r_{\tau-1} \geq \frac{2\beta}{\beta-1}.
\end{aligned}$$

Jetzt sei  $2 \leq j \leq \tau - 2$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{2^{m_j+n_j} \leq \sqrt{x}} 2^{m_j(\gamma/(\gamma-1)+2\varepsilon)+n_j(r_j/2+\varepsilon)} \leq d(\varepsilon) \sum_{2^{n_j} \leq \sqrt{x}} \left( \frac{\sqrt{x}}{2^{n_j}} \right)^{\gamma/(\gamma-1)+2\varepsilon} 2^{n_j(r_j/2+\varepsilon)} \leq \\
& \leq d(\varepsilon) x^{\gamma/2(\gamma-1)+\varepsilon} \sum_{2^{n_j} \leq \sqrt{x}} 2^{n_j(r_j/2-\gamma/(\gamma-1)-\varepsilon)} \leq d(\varepsilon) x^{r_j/4+\varepsilon} \quad \text{für } r_j \geq \frac{2\beta}{\beta-1}. \\
& \sum_{2^{m_j+n_j} > \sqrt{x}} x^{r_j/4} 2^{m_j(-r_j/2+\gamma/(\gamma-1)+2\varepsilon)+n_j\varepsilon} \leq d(\varepsilon) x^{r_j/4} 2^{(m_1+n_1)\varepsilon} \sum_{2^{m_j} \leq \sqrt{x}} 2^{m_j(-r_j/2+\gamma/(\gamma-1)+2\varepsilon)} \leq \\
& \leq d(\varepsilon) x^{r_j/4} 2^{(m_1+n_1)\varepsilon} \quad \text{für } r_j \geq \frac{2\beta}{\beta-1}.
\end{aligned}$$

Schließlich schätzen wir die Summe über  $m_1, n_1$  in (33) ab:

$$\begin{aligned}
& \sum_{2^{m_1+n_1} \leq \sqrt{x}} 2^{m_1(1/(\gamma-1)+4\varepsilon)+n_1(r_1/2-1+\varepsilon)} \leq d(\varepsilon) \sum_{2^{n_1} \leq \sqrt{x}} \left( \frac{\sqrt{x}}{2^{n_1}} \right)^{1/(\gamma-1)+4\varepsilon} 2^{n_1(r_1/2-1+\varepsilon)} \leq \\
& \leq d(\varepsilon) x^{1/2(\gamma-1)+2\varepsilon} \sum_{2^{n_1} \leq \sqrt{x}} 2^{n_1(r_1/2-\gamma/(\gamma-1)-3\varepsilon)} \leq \\
& \leq d(\varepsilon) x^{r_1/4-1/2+\varepsilon} \quad \text{für } r_1 \geq \frac{2\beta}{\beta-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{2^{m_1 + n_1} > \sqrt{x}} x^{r_1/4} 2^{m_1(-r_1/2 + 1/(\gamma-1) + 4\epsilon) + n_1(-1 + \epsilon) + (m_1 + n_1)\tau\epsilon} \leq \\
& \leq d(\epsilon) x^{r_1/4} \sum_{2^{m_1} \leq \sqrt{x}} 2^{m_1(-r_1/2 + 1/(\gamma-1) + (\tau+4)\epsilon)} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_1}}\right)^{(\tau+1)\epsilon-1} \leq \\
& \leq d(\epsilon) x^{r_1/4 - 1/2 + ((\tau+1)/2)\epsilon} \sum_{2^{m_1} \leq \sqrt{x}} 2^{m_1(-r_1/2 + \gamma/(\gamma-1) + 3\epsilon)} \leq \\
& \leq d(\epsilon) x^{r_1/4 - 1/2 + ((\tau+1)/2)\epsilon} \quad \text{für } r_1 \geq \frac{2\beta}{\beta-1}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß der linke Ausdruck in (28) höchstens gleich (vgl. (31), (32), (33))

$$\begin{aligned}
& d(\epsilon) \exp \left\{ \left( -\frac{1}{2}(\sigma - \tau + 1) + \frac{r_\tau + \dots + r_\sigma}{4} + \frac{r_{\tau-1}}{4} - \frac{1}{2(\gamma-1)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{r_{\tau-2} + \dots + r_2}{4} + \frac{r_1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{r}{4} - 1 - \frac{1}{2(\gamma-1)} - \frac{\sigma - \tau}{2} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \epsilon \left( \frac{3r}{4} + \frac{1}{2} + \sigma - \tau + 1 + 1 + \tau - 3 + \frac{\tau + 1}{2} \right) \right) \lg x \right\} = \\
& = d(\epsilon) x^{r/2 - 1 - 1/(\gamma-1) - (\sigma - \tau + 1) + \epsilon(3r/4 + \sigma + \tau/2)}
\end{aligned}$$

ist, was zu beweisen war. Für  $\beta = +\infty$  setzen wir überall  $1/(\gamma-1) = 0$  und führen analoge Rechnungen durch. Die Richtigkeit dieses Verfahrens folgt aus dieser Überlegung: Für  $\beta = +\infty$  hat man im Hilfssatz 1 der Abhandlung [6] die triviale Abschätzung  $v \leq M$ . Daraus folgt im Hilfssatz 2 der Abhandlung [6] für die Anzahl der Systeme  $(h_1, k_1; \dots; h_\sigma, k_\sigma)$  eine Abschätzung nach oben mit  $d(\epsilon) 2^{(l+m_2+\dots+m_\sigma)(1+\epsilon)}$ . Damit dürfen wir für  $\beta = +\infty$  in (14)  $1/(\gamma-1) = 0$  setzen. Wir bekommen auf diese Weise, daß der linke Ausdruck in (28) höchstens gleich

$$d(\epsilon) x^{r/2 - 1 - (\sigma - \tau + 1) + \epsilon}$$

für  $r_j \geq 2$  ( $1 \leq j \leq \tau - 1$ ),  $r_j \geq 4$  ( $\tau \leq j \leq \sigma$ ) ist, wie behauptet. Indem man  $\epsilon, C, D$  drei Folgen  $\epsilon_n \rightarrow 0, C_n \rightarrow 0, D_n \rightarrow +\infty$  durchlaufen läßt, bekommt man daraus den Satz 1.

Durch geringe Modifikation des eben durchgeführten Summationsverfahrens erhalten wir den

**Satz 2.** Es sei  $\sigma \geq 3$ , ganz;  $r_j$  seien ganz,  $r_j \geq 1$  ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ),  $r_1 + r_2 + \dots + r_\sigma = r$ . Weiter sei  $\tau$  ganz,  $3 \leq \tau \leq \sigma$ ;  $\alpha_j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, \tau - 1$ ). Wir

setzen  $\beta(\alpha_2/\alpha_1, \dots, \alpha_{\tau-1}/\alpha_1) = \beta$ . Dann gilt für fast alle positiven Wertsysteme  $(\alpha_\tau, \dots, \alpha_\sigma)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$

$$(34) \quad P_Q(x) = O(x^{r/2 + ((\tau-3)/2)\beta/(\beta-1) - \lambda + \varepsilon}),$$

wo  $\lambda = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\tau-1} \text{Min}(r_j, 2\beta/(\beta-1)) + \frac{1}{4} \sum_{j=\tau}^{\sigma} \text{Min}(r_j, 4)$  ist. Dabei setzen wir  $1/(\beta-1) = 0$ ,  $2\beta/(\beta-1) = 2$  für  $\beta = +\infty$ .

Der Satz 2 enthält die Jarniksche Behauptung II als Spezialfall für  $\beta = 2$ ,  $\tau = 3$ . Setzen wir formal  $\tau = \sigma + 1$ , so bekommen wir den Satz 3 der Abhandlung [6].

Alle Ergebnisse samt Beweisen lassen sich unmittelbar auf etwas allgemeinere Formen der Gestalt

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{\sigma} \alpha_j Q_j(u_{1,j}; u_{2,j}; \dots; u_{r_j,j}) \quad (\alpha_j > 0) \quad (j = 1, 2, \dots, \sigma)$$

übertragen, wo die quadratischen Formen  $Q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, \sigma$ ) positiv definit sind, und ganzzahlige Koeffizienten haben.

#### *Literaturverzeichnis*

- [1] *V. Jarnik*: „Sur les points à coordonnées entières dans les ellipsoïdes à plusieurs dimensions“, Bull. Internat. de l'Académie des Sciences de Bohême, 1928, 10 S.
- [2] *V. Jarnik*: „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“ Math. Annalen 100 (1928) S. 699–721.
- [3] *V. Jarnik*: „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorffschen Maßbegriffes“, Math. Zeitschrift 38 (1934) S. 217–256.
- [4] *V. Jarnik*: „Zur Gitterpunktlehre von mehrdimensionalen Ellipsoiden“, Acta Arithmetica IX (1964), S. 321–329.
- [5] *B. Diviš*: „On lattice points in high-dimensional ellipsoïds“ (preliminary communication), Comment. Math. Univ. Carolinae, vol. 9, fasc. 2, S. 199–205.
- [6] *B. Diviš*: „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden“, Czech. Math. Journal, 20 (95), (1970), 130–139.

*Anschrift des Verfassers*: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).