Czechoslovak Mathematical Journal

Leo Boček

Untermannigfaltigkeiten von homogenen Räumen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 1, 1–4

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100998

CZECHOSLOVAK MATHEMATICAL JOURNAL
Mathematical Institute of Czechoslovak Academy of Sciences
V. *21* (*96*), PRAHA 25. 3. 1971, No 1

UNTERMANNIGFALTIGKEITEN VON HOMOGENEN RÄUMEN*)

LEO BOČEK, Praha

(Eingegangen am 8. Mai 1968)

Unter einer differenzierbaren Abbildung werden wir immer eine C^∞-differenzierbare Abbildung verstehen.

Definition. Eine differenzierbare Funktion f auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M heisst *k-horizontal im Punkte* $q \in M$, wenn in lokalen Koordinaten alle partiellen Ableitungen der Funktion f bis zur k-ten Ordnung einschliesslich im Punkte q verschwinden.

Definition. Ein lineares Funktional, das auf der Menge aller differenzierbaren Funktionen auf M definiert ist, nennen wir einen *k-Jet im Punkte* $q \in M$, wenn er allen k-horizontalen Funktionen im Punkte q die Null zuordnet. Den Vektorraum aller k-Jets der Mannigfaltigkeit M im Punkte q bezeichnen wir $T^k_q(M)$, das Faserbündel aller k-Jets der Mannigfaltigkeit M bezeichnen wir $T^k(M)$.

Jede differenzierbare Abbildung φ von M in die differenzierbare Mannigfaltigkeit N induziert in naheliegender Weise eine Abbildung von $T^k(M)$ nach $T^k(N)$, die wir φ^k bezeichnen. (Statt φ^1 bzw. $T^1(M)$ werden wir auch die gewöhnliche Bezeichnung φ' bzw. $T(M)$ benutzen.)

1. Es sei G eine Liesche Gruppe, $\mathfrak{G}$ ihr Tangentialraum im Einheitselement e; $A, B \in \mathfrak{G}$. Das Liesche Produkt der linksinvarianten Vektorfelder, deren Werte in e gerade A und B sind, bezeichnen wir $[A, B] \in \mathfrak{G}$. Es sei weiter U eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit und ω eine differenzierbare 1-Form auf U mit Werten in $\mathfrak{G}$. Wir definieren auf $U \times G$ eine Distribution Δ wie folgt: Für jeden Punkt $(u, g) \in U \times G$ gehören zu Δ in diesem Punkt genau alle Vektoren der Gestalt $(A, g\,\omega(A))$, wo $A \in T_u(U)$ und $g\,\omega(A)$ ist der Vektor, der aus dem Vektor $\omega(A)$ durch Links-Translation mittels des Elementes g entsteht. Man kann leicht das folgende Lemma beweisen.

*) Diese Arbeit wurde durch die Alexander von Humboldt-Stiftung gefördert.

Lemma 1. *Die Distribution Δ ist genau dann involutiv, wenn*

$$d\omega(X, Y) = -\tfrac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] .$$

Aus der Einführung der Distribution Δ folgt unmittelbar

Lemma 2. *Wenn die Distribution Δ involutiv ist, dann gibt es für jeden Punkt $(u, g) \in U \times G$ eine einzige maximale zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit V, die diesen Punkt enthält und die bei der natürlichen Projektion $\pi_1 : U \times G \to \to U$ eine Überlagerungsmannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit U ist. Für jeden ihrer Tangentialvektoren $Z \in T_{(\bar{u},\bar{g})}(V)$ gilt $\pi'_2 Z = \bar{g}\, \omega(\pi'_1 Z)$, wo π_2 die Projektion $U \times G \to G$ bezeichnet. Jede Integralmannigfaltigkeit der Distribution Δ ist dann von der Gestalt $g_0 V$, wo wir die Aktion von G auf $U \times G$ durch $g_0(u, g) = (u, g_0\, g)$ definiert haben.*

2. Es sei H eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe G und $M = G/H$. Wir setzen voraus, dass G auf M effektiv operiert, d. h. $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = \{e\}$. Es gibt eine natürliche Abbildung von $T(T^k(M))$ in $T^{k+1}(M)$. Bezeichnen wir diese Abbildung mit ϱ^k, so ist $\varrho^k A$ für $A \in T(T^k(M))$ durch $(\varrho^k A) f = AF$ definiert, wo $F(Y) = Yf$ für jede differenzierbare Funktion f auf M und $Y \in T^k(M)$.

Ist B ein Feld von k-Jets auf der Mannigfaltigkeit M und A Tangentialvektor von M, ist $B'(A) \in T(T^k(M))$. Statt $\varrho^k\, B'(A)$ werden wir kurz AB schreiben. Wir bezeichnen noch mit α die natürliche Projektion $G \to M = G/H$ und $p = \alpha(e)$.

Die Aktion von G auf M induziert erstens eine Aktion von G auf $T^k(M)$ für jedes k und diese dann eine bilineare Abbildung

$$\mathfrak{G} \times T^k_p(M) \to T(T^k(M)) \xrightarrow{\varrho^k} T^{k+1}_p(M) ,$$

die wir mit β^k bezeichnen. Weil $\beta^{k+1}/\mathfrak{G} \times T^k_p(M) = \beta^k$ ist, können wir kurz β schreiben.

Definition. Wir sagen, dass ein Unterraum $W \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k_p(M)$ die Eigenschaft $\mathscr{V}$ besitzt, wenn aus den Bedingungen $\beta(\gamma, x) = 0$ für alle $x \in W$ und $\alpha'(\gamma) = 0$ folgt, dass $\gamma = 0$ ist.

Jedes Element $h \in H$ gibt eine Abbildung $h : T^k_p(M) \to T^k_p(M)$.

Lemma 3. *W hat die Eigenschaft $\mathscr{V}$ genau dann, wenn der Raum hW diese Eigenschaft besitzt, wo $h \in H$ ist.*

B e w e i s. Der Definition von β zufolge ist für jedes $v \in T^k_p(M)$, $\gamma \in \mathfrak{G}$ und differenzierbare Funktion f auf M, $\beta(\gamma, v) f = \gamma[vf(gx)]$, wo der Ausdruck in eckigen Klammern als Funktion von g zu verstehen ist, also ist $\beta(\gamma, hv) = h\beta(\mathrm{ad}\,(h^{-1})\,\gamma, v)$, woraus die Gültigkeit des Lemmas folgt.

3. Es sei jetzt φ eine differenzierbare Abbildung von U nach M. Ist B ein Feld von k-Jets auf U und $A \in T_u(U)$, so ist $\varphi^{k+1}(AB) = A\,\varphi^k(B)$. Zu jedem $u \in U$ gibt es ein $g(u) \in G$ so, dass $g^{-1}(u)\,\varphi(u) = p$ ist und lokal kann man die Abbildung g differenzierbar wählen. Sind g, g_1 zwei solche differenzierbare Abbildungen, so ist $g_1(u) = g(u)\,h(u)$, wo h eine lokale differenzierbare Abbildung von U nach H ist. Mittels der Abbildung g, bzw. g_1, bekommen wir für jedes k eine Abbildung $g^{-1} \circ \circ\, \varphi^k = \psi^k : T^k(U) \to T_p^k(M)$, bzw. $\psi_1^k = h^{-1}(u) \circ \psi^k$. Die Abbildungen ψ^k besitzen die folgenden Eigenschaften $g\,\psi^1(A) = \alpha'(g'(A))$, $A[g\,\psi^k(B)] = g\,\psi^{k+1}(AB)$. Bezeichnen wir mit ω die Abbildung $A \mapsto g^{-1}(u)\,g'(A)$, so können wir diese Bedingungen in folgender Form schreiben

$$\alpha'(\omega(A)) = \psi^1(A)\,, \quad \beta(\omega(A), \psi^k(B)) = \psi^{k+1}(AB) - A\,\psi^k(B)\,. \tag{1}$$

Wählen wir statt g die Abbildung g_1 und schreiben wir $\omega_1(A) = g_1^{-1}(u)\,g_1'(A)$, so ist $\omega_1(A) = \operatorname{ad}(h^{-1})\,\omega(A) + h^{-1}(u)\,h'(A)$ und für ω_1 sind auch die Gleichungen (1) erfüllt, wenn wir statt ψ^k die Abbildungen ψ_1^k verwenden.

4. Es seien zwei lineare Abbildungen $\psi, \psi_1 : T_u^l(U) \to T_p^l(M)$ gegeben. Wir sagen, dass diese Abbildungen äquivalent sind, wenn es ein $h \in H$ so gibt, dass $\psi_1 = h\psi$ ist. Die Äquivalenzklasse, die durch das Element ψ bestimmt ist, bezeichnen wir $\{\psi\}$.

Satz 1. *Es sei für jedes $u \in U$ und ein festes k ein Element $\{\psi_u\}$ gegeben, wo $\psi_u : : T_u^{k+1}(U) \to T_p^{k+1}(M)$ lineare Abbildungen sind mit den Eigenschaften*

a) *lokal ist es möglich, die Repräsentanten ψ_u differenzierbar zu wählen;*

b) *für jedes Feld B von k-Jets auf U und $A \in T_u(U)$ gibt es genau ein Element $\omega(A) \in \mathfrak{G}$, so dass die Gleichungen (1) erfüllt sind (die Eindeutigkeit ist genau dann erfüllt, wenn $\psi_u(T_u^k(U))$ für jedes u die Eigenschaft $\mathscr{V}$ besitzt);*

c) *für in dieser Weise entstandene Form ω gilt $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]$.*

Dann gibt es eine Überlagerungsmannigfaltigkeit V der Mannigfaltigkeit U mit der Projektion π und eine Abbildung $\varphi : V \to M$, so dass für jedes $B \in T_v^{k+1}(V)$, $v \in V$ gilt

$$\{g^{-1}\varphi^{k+1}\} = \{\psi_{\pi v} \circ \pi^{k+1}\}\,, \quad wo \quad g^{-1}\,\varphi(v) = p\,. \tag{2}$$

Sind φ, $\bar{\varphi}$ zwei solche Abbildungen, dann gibt es ein $\bar{g} \in G$ so, dass $\bar{\varphi} = \bar{g}\varphi$.

Beweis. Erwähnen wir zuerst, dass die Erfüllung der Voraussetzungen nicht von der Wahl der Repräsentanten ψ_u abhängt. Wenn wir lokal andere Repräsentanten $\bar{\psi}_u = h^{-1}(u)\,\psi_u$ wählen, bekommen wir statt ω die Form ω_1, $\omega_1(A) = = \operatorname{ad}(h^{-1})\,\omega(A) + h^{-1}(u)\,h'(A)$. Weiter benutzen wir für Umgebungen, auf denen wir die Repräsentanten ψ_u differenzierbar wählen können, dass Lemma 2. Auf dem Durschnitt zweier solcher Umgebungen bleibt eine Unbestimmtheit, die durch die

Uneindeutigkeit bei der Wahl der Form ω gegeben ist, die aber bei der Projektion α wegfällt. Die Erfüllung der Gleichungen (2) folgt aus (1) und daraus, dass man jeden $(l + 1)$-Jet als Linearkombination von Gliedern der Gestalt AB schreiben kann, wo A ein Tangentialvektor und B ein Feld von l-Jets ist.

Aus dem vorhergehenden Satz folgt unmittelbar

Satz 2. *Wenn $\varphi_1, \varphi_2 : U \to M$ zwei differenzierbare Untermannigfaltigkeiten des homogenen Raumes G/H sind, die in Deformation $(k + 1)$-ter Ordnung sind, d. h. für jedes $u_0 \in U$ gibt es ein $g_0 \in G$ so, dass $g_0 \varphi_1^{k+1} / T_{u_0}^{k+1}(M) = \varphi_2^{k+1} / T_{u_0}^{k+1}(M)$, und wenn für jedes $u \in U$ $g\varphi_1^k(T_u^k(U))$ die Eigenschaft $\mathscr{V}$ besitzt (g ist so gewählt, dass $g\ \varphi_1(u) = p$ ist), dann sind φ_1 und φ_2 äquivalent.*

Literatur

R. Hermann: Equivalence invariants for submanifolds of homogeneous spaces, Math. Ann. *158* (1965), 284—289.

M. Kočandrle: Differential geometry of submanifolds in affine space with tensor structure, Czech. Math. Journal *92* (1967), 434—446.

K. Nomizu: Lie groups and differential geometry, Publ. Math. Soc. Japan, 1956.

J. T. Schwartz: Differential geometry and topology, 1965—66, New York University.

A. Švec: On the geometry of submanifolds in homogeneous spaces, Matem. časopis *17* (1967), 146—166.

A. Švec: Deformations of submanifolds of homogeneous spaces, Čas. pro pěst. mat. *93* (1968), 22—29.

Anschrift des Verfassers: Praha 8-Karlín, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).