

Karel Havlíček; Jürgen Tietze

Zur Geometrie der endlichen Ebene der Ordnung $n = 4$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 1, 157–164

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101010>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1971

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ZUR GEOMETRIE DER ENDLICHEN EBENE DER ORDNUNG $n = 4$

KAREL HAVLÍČEK, Praha und JÜRGEN TIETZE, Aachen

(Vorgelegt am 9. März 1970)

Aus verschiedenen bekannten Schemas endlicher projektiver Ebenen π_4 der Ordnung $n = 4$ wählen wir als Basis das folgende Schema¹⁾ aus. Die 21 Punkte (bzw. Geraden) in π_4 bezeichnen wir mit A_j, B_j, C_j, D_j, W_i (bzw. a_j, b_j, c_j, d_j, w_i), wobei $j = 1, 2, 3; i = 1, \dots, 9$.

Das Inzidenzschema ist dann folgendermaßen definiert²⁾:

$$(1) \quad \begin{array}{ll} a_1 = \{A_2, A_3, W_1, W_2, W_3\} & b_1 = \{B_2, B_3, W_1, W_4, W_7\} \\ a_2 = \{A_1, A_3, W_4, W_5, W_6\} & b_2 = \{B_1, B_3, W_2, W_5, W_8\} \\ a_3 = \{A_1, A_2, W_7, W_8, W_9\} & b_3 = \{B_1, B_2, W_3, W_6, W_9\} \\ \\ c_1 = \{C_2, C_3, W_3, W_5, W_7\} & d_1 = \{D_2, D_3, W_2, W_6, W_7\} \\ c_2 = \{C_1, C_3, W_2, W_4, W_9\} & d_2 = \{D_1, D_3, W_3, W_4, W_8\} \\ c_3 = \{C_1, C_2, W_1, W_6, W_8\} & d_3 = \{D_1, D_2, W_1, W_5, W_9\} \\ \\ w_1 = \{A_1, B_1, C_3, D_3, W_1\} & w_5 = \{A_2, B_3, C_3, D_1, W_6\} \\ w_2 = \{A_1, B_3, C_1, D_2, W_3\} & w_6 = \{A_2, B_2, C_1, D_3, W_5\} \\ w_3 = \{A_1, B_2, C_2, D_1, W_2\} & w_7 = \{A_3, B_1, C_1, D_1, W_7\} \\ w_4 = \{A_2, B_1, C_2, D_2, W_4\} & w_8 = \{A_3, B_3, C_2, D_3, W_9\} \\ \\ & w_9 = \{A_3, B_2, C_3, D_2, W_8\}. \end{array}$$

Die Anordnung von Punkten und Geraden in diesem Schema (1) legt es nahe, die geometrischen Eigenschaften verschiedener homologischer Dreiecke in π_4 zu untersuchen. Dabei muß man zunächst folgendes erläutern:

Wir nennen eine Untermenge von π_4 , die aus sechs verschiedenen Punkten besteht, von denen keine drei kollinear sind, ein einfaches Sechseck oder ein E_6 -System. Zwei punktfremde Dreiecke aus einem E_6 heißen homologisch, wenn sie zentrisch und axial sind, also die Desargues'sche Konfiguration bilden. Gilt diese Eigenschaft

¹⁾ [3] S. 73, Schema (6); das hier gebrauchte Schema unterscheidet sich von dem in [3] angegebenen Schema durch die Vertauschung von W_5 und W_6 sowie w_5 und w_6 .

²⁾ Jede dieser Geraden ist dabei als 5-tupel der Punkte von π_4 dargestellt.

zweier Dreiecke in π_4 insgesamt für n verschiedene Zuordnungen ihrer Eckpunkte bzw. Verbindungsgeraden ihrer Eckpunkte, so heißen die Dreiecke n -fach homologisch. (Da es höchstens sechs verschiedene solcher Zuordnungen gibt, ist $n = 6$ die Maximalzahl möglicher Homologien zweier Dreiecke.)

In π_4 existiert folgende Konfiguration:

Satz 1. *Es gibt vier punktfremde Dreiecke in π_4 , von denen je zwei 6-fach homologisch sind. Die Zentren der Homologien je zweier Dreiecke sind die Eckpunkte der restlichen beiden Dreiecke, die Achsen der Homologien liegen den entsprechenden Zentren in den restlichen beiden Dreiecken gegenüber. Entsprechende Dreiecksseiten der Homologien schneiden sich auf den zugehörigen Homologieachsen in weiteren 9 verschiedenen Punkten. (Diese 9 Punkte sind also von den gegebenen 12 Eckpunkten der Dreiecke verschieden.)*

Der Beweis wird dadurch geliefert, daß wir ein Beispiel der eben angegebenen Konfiguration konstruieren: Man zeigt leicht, daß die 4 Dreiecke

$$(2) \quad A_1A_2A_3, B_1B_2B_3, C_1C_2C_3, D_1D_2D_3$$

eine solche Konfiguration bilden. Betrachten wir z. B. die beiden Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ mit der Zuordnung

$$(3) \quad A'_1 = B_1, \quad A'_2 = B_2, \quad A'_3 = B_3,$$

so bestätigt man aus dem Inzidenzschema (1), daß die Verbindungsgeraden (A_i, A'_i) ($i = 1, 2, 3$) durch denselben Punkt D_3 gehen. Die Schnittpunkte entsprechender Seiten (A_i, A_k) und (A'_i, A'_k) ³⁾ sind:

$$(4) \quad \begin{aligned} (A_1, A_2) \cap (A'_1, A'_2) &= W_9, \\ (A_3, A_1) \cap (A'_3, A'_1) &= W_5, \\ (A_2, A_3) \cap (A'_2, A'_3) &= W_1. \end{aligned}$$

Die Punkte W_1, W_5, W_9 liegen auf der Geraden d_3 , die dem Punkt D_3 im Dreieck $D_1D_2D_3$ gegenüberliegt. Wir sagen kurz, daß bei der Zuordnung der Eckpunkte (3) die Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ homologisch mit dem Zentrum D_3 und der Achse d_3 sind.

Ganz analog weist man nach, daß für alle weiteren Zuordnungen der Eckpunkte die beiden Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ homologisch mit folgenden Zentren und Achsen sind:

³⁾ Hinsichtlich der Symbolik siehe etwa [1], [4].

Die Zuordnungen

$$(5) \quad A'_1 = B_3, \quad A'_2 = B_1, \quad A'_3 = B_2$$

$$(6) \quad A'_1 = B_2, \quad A'_2 = B_3, \quad A'_3 = B_1$$

$$(7) \quad A'_1 = B_3, \quad A'_2 = B_2, \quad A'_3 = B_1$$

$$(8) \quad A'_1 = B_2, \quad A'_2 = B_1, \quad A'_3 = B_3$$

$$(9) \quad A'_1 = B_1, \quad A'_2 = B_3, \quad A'_3 = B_2$$

liefern nacheinander die Zentren D_2, D_1, C_1, C_2, C_3 und die Achsen d_2, d_1, c_1, c_2, c_3 , wobei sich entsprechende Seiten in jeder Homologie auf den jeweiligen Achsen in den Punkten

$$(5') \quad W_3, W_4, W_8$$

$$(6') \quad W_2, W_6, W_7$$

$$(7') \quad W_3, W_5, W_7$$

$$(8') \quad W_2, W_4, W_9$$

$$(9') \quad W_1, W_6, W_8$$

schneiden.

Wie man durch analoge Überlegung bestätigt, gilt diese Eigenschaft für zwei beliebige Dreiecke aus (2). Es ist bemerkenswert, daß bei der Konstruktion der 6-fachen Homologie zweier Dreiecke sämtliche 21 Punkte (und Geraden) aus π_4 verwendet wurden.

Weiterhin ist aus dem Schema (1) ersichtlich, daß je zwei beliebige Dreiecke aus (2) ein einfaches Sechseck E_6 bilden und daß die zugehörigen Homologiezentren ein weiteres zu E_6 punktfremdes⁴⁾ System E'_6 bilden. Dabei können wir E'_6 in eindeutiger Weise so in zwei punktfremde Dreiecke zerlegen, daß diese wiederum 6-fach homologisch sind und ihre Zentren und Achsen die Eckpunkte und deren gegenüberliegende Seiten der beiden Ausgangsdreiecke aus E_6 bilden.

Über die E_6 gilt in π_4 der

Satz 2. *Jedes E_6 aus π_4 ist durch vier seiner Eckpunkte eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir bezeichnen die vier Eckpunkte, die ein vollständiges Viereck bilden, mit P_1, P_2, P_3, P_4 , die Diagonalepunkte mit D_1, D_2, D_3 und die sechs Seiten mit p_1, \dots, p_6 . Auf den Geraden p_k liegen insgesamt 19 Punkte (vier P_i , drei D_j und

⁴⁾ Zwei n -Ecke sind punktfremd, wenn sie keinen gemeinsamen Eckpunkt besitzen.

außerdem noch zwei weitere Punkte auf jeder p_k). Es bleiben also noch genau zwei weitere Punkte P_5, P_6 in π_4 , die offenbar auf der Verbindungsgeraden der Diagonalepunkte D_1, D_2, D_3 liegen und das gegebene Viereck P_1, P_2, P_3, P_4 zu einem E_6 ergänzen.

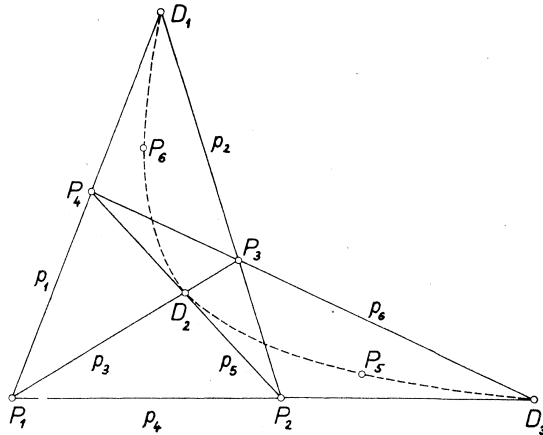


Fig. 1.

Satz 3. Sind in π_4 zwei Dreiecke $P_1P_2P_3, Q_1Q_2Q_3$ gegeben, die zusammen ein einfaches Sechseck E_6 bilden; dann sind diese zwei Dreiecke 6-fach homologisch. Die Zentren dieser Homologien bilden ein zu E_6 punktfremdes einfaches Sechseck E'_6 .

Beweis. Nach Satz 2 ist E_6 durch vier beliebige seiner Eckpunkte bestimmt, etwa durch P_1, P_2, P_3, Q_1 . Nach dem Fundamentalsatz über projektive Kollineationen⁵⁾ existiert eine Kollineation φ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \varphi : A_i &\rightarrow P_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ \varphi : B_1 &\rightarrow Q_1. \end{aligned}$$

Nach Satz 2 bilden die Punkte B_2, B_3 in eindeutiger Weise mit A_1, A_2, A_3, B_1 ein einfaches Sechseck \bar{E}_6 , dessen Bild in der Kollineation φ genau das gegebene E_6 ist. Alle weiteren Behauptungen des Satzes 3 sind jetzt schon einfache Folgerungen des Satzes 1 und der Tatsache, daß die Inzidenz bei der Kollineation φ erhalten bleibt.

Insbesondere folgt aus Satz 3, daß sämtliche punktfremde Dreiecke, die sich aus einem beliebigen E_6 bilden lassen, 6-fach homologisch sind.

Satz 4. In der Ebene π_4 gibt es 1680 verschiedene⁶⁾ Paare punktfremder Dreiecke, die 6-fach homologisch sind.

⁵⁾ vgl. [2] S. 146, Theorem 8.12.

⁶⁾ Zwei Dreiecke sind verschieden, wenn sie nicht in allen Eckpunkten übereinstimmen.

Beweis. Um Satz 4 zu beweisen, genügt es nach Satz 2 und Satz 3, die Anzahl der verschiedenen vollständigen Vierecke in π_4 zu bestimmen. Von den insgesamt $\binom{21}{4}$ Möglichkeiten, irgend vier verschiedene Punkte aus π_4 zu wählen, liefern folgende Fälle kein vollständiges Viereck:

1. Vier Punkte auf einer Geraden: Für jede Gerade ergeben sich $\binom{5}{4}$ Möglichkeiten, insgesamt also 105 Möglichkeiten.

2. Drei Punkte auf einer Geraden, ein Punkt auf einer beliebigen anderen Geraden: Auf jeder Geraden kann man auf $\binom{5}{3}$ Arten drei Punkte auswählen. Für den vierten Punkt bleiben also noch jeweils 16 Möglichkeiten übrig. Insgesamt gibt es also $21 \cdot 16 \cdot 10 = 3360$ Möglichkeiten.

Jede andere als unter 1. und 2. aufgeführte Wahl von vier verschiedenen Punkten liefert ein vollständiges Viereck in π_4 . Es sind dies $\binom{21}{4} - 105 - 3360 = 2520$ verschiedene vollständige Vierecke. Jeweils $\binom{6}{4}$ vollständige Vierecke liefern dasselbe E_6 (Satz 2). Damit gibt es insgesamt 168 verschiedene Systeme E_6 . In jedem E_6 gibt es $\frac{1}{2} \binom{6}{3} = 10$ verschiedene Paare 6-fach homologischer Dreiecke, in π_4 also insgesamt 1680 verschiedene Paare von 6-fach homologischen Dreiecken.

Satz 5. *Aus der Vorgabe eines einfachen Sechsecks E_6 in der Ebene π_4 läßt sich ein Inzidenzschema von π_4 konstruieren.*

Beweis. Nach Satz 3 sind je zwei punktfremde Dreiecke aus E_6 6-fach homologisch, wobei Zentren und Achsen der Homologien von den Eckpunkten der Ausgangsdreiecke und deren Verbindungsgeraden verschieden sind. Aus Satz 1 folgt weiterhin, daß bei der Konstruktion der 6-fachen Homologie zweier Dreiecke alle 21 Punkte und Geraden von π_4 benötigt werden. Unter Verwendung dieser Tatsachen läßt sich jetzt ein Inzidenzschema von π_4 bestimmen:

Bezeichnen wir die Eckpunkte zweier punktfremder Dreiecke aus E_6 mit 0, 1, 2 bzw. 3, 4, 5 und ihre Verbindungsgeraden mit

$$(10) \quad \begin{aligned} (0, 1) = \mathbf{0}, \quad (2, 0) = \mathbf{1}, \quad (1, 2) = \mathbf{2} \quad \text{bzw.} \\ (3, 4) = \mathbf{3}, \quad (5, 3) = \mathbf{4}, \quad (4, 5) = \mathbf{5}. \end{aligned}$$

Die Homologiezentren sind

$$(11) \quad \begin{aligned} 6 &= (0, 3) \cap (1, 4) \cap (2, 5), & 9 &= (0, 5) \cap (1, 4) \cap (2, 3), \\ 7 &= (0, 4) \cap (1, 5) \cap (2, 3), & 10 &= (0, 4) \cap (1, 3) \cap (2, 5), \\ 8 &= (0, 5) \cap (1, 3) \cap (2, 4), & 11 &= (0, 3) \cap (1, 5) \cap (2, 4). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir die auftretenden Geraden folgendermaßen:

$$(12) \quad \begin{aligned} (0, 3) &= 12, & (0, 4) &= 15, & (0, 5) &= 18, \\ (1, 4) &= 13, & (1, 5) &= 16, & (1, 3) &= 19, \\ (2, 5) &= 14, & (2, 3) &= 17, & (2, 4) &= 20. \end{aligned}$$

Die Numerierung der Punkte und Geraden wurde so gewählt, daß wir die den Zentren entsprechenden Homologieachsen auf duale Weise ermitteln können, d. h. indem wir in (11) und (12) Punkte und Geraden vertauschen. Damit ist bereits teilweise das Inzidenzschema (Fig. 2) bestimmt. Durch analoge Konstruktion der sechsfachen Homologie zweier anderer Dreiecke aus E_6 erhalten wir unter Beachtung der Dualität das vollständige Inzidenzschema (Fig. 2):

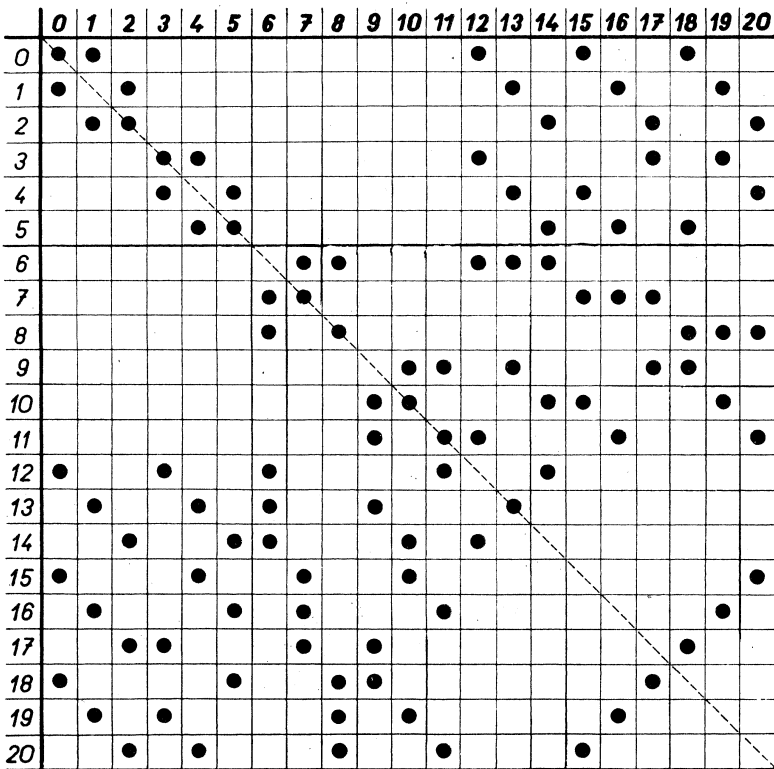


Fig. 2.

Bemerkenswert ist hierbei, daß durch die Wahl eines E_6 aus π_4 ein Inzidenzschema von π_4 bereits bis auf die Numerierung von Punkten und Geraden eindeutig festgelegt ist.

Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar der

Satz 6. Ein Isomorphismus zwischen zwei verschiedenen Inzidenzschemas I, I' einer Ebene π_4 ist bis auf Numerierung der Punkte und Geraden eindeutig bestimmt durch die eineindeutige Abbildung der Eckpunkte eines beliebigen E_6 aus I auf die Eckpunkte eines beliebigen E'_6 aus I' .

So liefert beispielsweise die Abbildung der Eckpunkte $0, 1, 2, 3, 4, 5$ eines E_6 aus Schema Fig. 2 auf die Eckpunkte $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ eines E'_6 aus Schema (1) den folgenden Isomorphismus:

$$(13) \quad \begin{array}{l} 0 \rightarrow A_1, \quad 1 \rightarrow A_2, \quad 2 \rightarrow A_3, \quad 3 \rightarrow B_1, \quad 4 \rightarrow B_2, \\ 5 \rightarrow B_3, \quad 6 \rightarrow D_3, \quad 7 \rightarrow D_1, \quad 8 \rightarrow D_2, \quad 9 \rightarrow C_1, \\ 10 \rightarrow C_2, \quad 11 \rightarrow C_3, \quad 12 \rightarrow W_9, \quad 13 \rightarrow W_5, \quad 14 \rightarrow W_1, \\ 15 \rightarrow W_8, \quad 16 \rightarrow W_4, \quad 17 \rightarrow W_3, \quad 18 \rightarrow W_7, \quad 19 \rightarrow W_6 \\ 20 \rightarrow W_2; \\ 0 \rightarrow a_3, \quad 1 \rightarrow a_2, \quad 2 \rightarrow a_1, \quad 3 \rightarrow b_3, \quad 4 \rightarrow b_2, \\ 5 \rightarrow b_1, \quad 6 \rightarrow d_3, \quad 7 \rightarrow d_2, \quad 8 \rightarrow d_1, \quad 9 \rightarrow c_1, \\ 10 \rightarrow c_3, \quad 11 \rightarrow c_2, \quad 12 \rightarrow w_1, \quad 13 \rightarrow w_6, \quad 14 \rightarrow w_8, \\ 15 \rightarrow w_3, \quad 16 \rightarrow w_5, \quad 17 \rightarrow w_7, \quad 18 \rightarrow w_2, \quad 19 \rightarrow w_4, \\ 20 \rightarrow w_9. \end{array}$$

Schlußbemerkung. Der Fall der mehrfach homologischen Dreiecke in der klassischen Ebene über dem Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen ist schon 1870 untersucht worden, vgl. [5], [6], [7], [8]. Die Eigenschaften der 6-fach homologischen Dreiecke in der Ebene π_4 , die hier unmittelbar aus dem Inzidenzschema (1) dieser Ebene folgen, hat unter anderem W. L. Edge [9] überwiegend mittels der Galoisfelder untersucht.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Dembowski: Endliche Geometrien, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, XIII (1966), 32–61.
- [2] R. Hartshorne: Foundations of Projective Geometry, New York 1967.
- [3] K. Havlíček: Zur Konstruktion einer endlichen Ebene, Časopis pro pěst. mat. 95 (1970), 71–75.
- [4] R. Lingenberg: Grundlagen der Geometrie I, Mannheim—Wien—Zürich 1969.
- [5] J. Rosanes: Über Dreiecke in perspektivischer Lage, Mathematische Annalen, 2 (1870), 549–552.
- [6] H. Schröter: Über perspektivisch liegende Dreiecke, Mathematische Annalen, 2 (1870), 553–562.

- [7] *E. Hess*: Beiträge zur Theorie der mehrfach perspectiven Dreiecke und Tetraeder, *Mathematische Annalen*, 28 (1887), 167—260.
- [8] *J. Vályi*: Über die Gruppen von mehrfach perspectiven Dreiecken in der Ebene, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 9 (1898), 169—176.
- [9] *W. L. Edge*: Some implications of the geometry of the 21-point plane. *Mathematische Zeitschrift*, 87 (1965) 348—362.

Anschrift der Verfasser: Karel Havlíček, Praha 1, Malostranské nám. 25 (Matematicko-fyzikální fakulta KU), ČSSR.

Jürgen Tietze, 51 — Aachen, Templergraben 55 (Institut für Geometrie und Praktische Mathematik der RWTH Aachen), BRD.