Jan Stanisław Lipiński

Über eine Frage von Herr L. Mišik

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 2, 234–235

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101018`

Czechoslovak Mathematical Journal, 21 (96) 1971, Praha

ÜBER EINE FRAGE VON HERR L. MIŠIK

JAN STANISLAW LIPIŃSKI, Gdańsk

(Eingelangt am 9. Dezember 1969)

Herr L. MIŠIK hat im Artikel [1] folgende Begriffe definiert: Sei P eine Mengeneigenschaft. Man sagt, daß P f-durchschnittlich ist, wenn für jede Funktion f, für welche die Mengen $f_a = \{x : f(x) > a\}$ und $f^a = \{x : f(x) < a\}$ für jedes a die Eigenschaft P besitzen, dieselbe Eigenschaft auch $f_a^b = f_a \cap f^b$ für alle a und b besitzt. Herr Mišik hat bewiesen, daß es solche nicht f-durchschnittliche Mengeneigenschaften P_0 gibt, für welche die Eigenschaft P: „E ist eine F_σ-Menge, die die Eigenschaft P_0 hat", eine f-durchschnittliche Eigenschaft ist. Im Zusammenhang mit diesem Erfolg, hat er die folgende Frage gestellt: Gibt es eine nicht f-durchschnittliche Mengeneigenschaft P_0 so, daß die Eigenschaft P: „E ist eine $G_{\delta\sigma}$-Menge, die die Eigenschaft P_0 besitzt", eine f-durchschnittliche Eigenschaft ist?

In dieser Note gebe ich auf die obige Frage eine positive Antwort. Zuerst konstruiere ich direkt eine Mengenklasse $\mathscr{P}$, so daß „$E \in \mathscr{P}$" eine nicht f-durchschnittliche – und „$E \in \mathscr{P} \cap G_{\delta\sigma}$" eine f-durchschnittliche Eigenschaft ist. Dann folgt eine indirekte Lösung: Ich gebe einen allgemeinen Satz an, aus welchem die positive Antwort hervorgeht.

1. Sei $\mathscr{P}$ die Klasse aller Mengen, die entweder offen, oder unmeßbar sind. Nehmen wir drei Mengen A_1, A_2 und A_3 so daß $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (-\infty, +\infty)$, $A_2 \cap A_3 = A_1 = \langle 0, 1 \rangle$ und A_2 und A_3 unmeßbar sind. Die Funktion

$$(1) \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in A_2 \setminus A_1 \\ 0 & \text{für} \quad x \in A_1 \\ -1 & \text{für} \quad x \in A_3 \setminus A_1 \end{cases}$$

zeigt, daß die Eigenschaft P_0: „$E \in \mathscr{P}$" nicht f-durchschnittlich ist. Das ist ganz natürlich: Die Mengen f_a und f^a sind unmeßbar, also gehören zu $\mathscr{P}$. Die Menge $f_{-1}^1 = \langle 0, 1 \rangle$ ist weder unmeßbar, noch offen und gehört nicht zu $\mathscr{P}$. Die Eigenschaft P: „$E \in \mathscr{P}$ und E ist eine $G_{\delta\sigma}$-Menge" bedeutet, daß E eine offene Menge ist. Daher folgt, daß P f-durchschnittlich ist.

2. Seien P und P_0 zwei Mengeneigenschaften. Wir sagen, daß P eine Obereigenschaft von P_0 ist, wenn jede Menge, welche die Eigenschaft P_0 besitzt, die Eigenschaft P hat.

Satz. *Sei P_0 eine Mengeneigenschaft. Wenn es zwei Punkte x_1, x_2 und eine nichtleere Menge E gibt, welche die Bedingungen: $x_1 \neq x_2$, $x_1 \notin E$, $x_2 \notin E$ und „E hat die Eigenschaft P_0 nicht", erfüllen, so existiert eine Obereigenschaft von P_0, die nicht f-durchschnittlich ist.*

Beweis. Sei $\mathscr{P}$ die Klasse aller Mengen, die die Eigenschaft P_0 haben. Bezeichnen wir $A_1 = E$, $A_2 = E \cup \{x_1\}$, $A_3 = (-\infty, +\infty) \setminus (E \cup \{x_1\})$. Dann $x_2 \in A_3$ und alle A_i $(i = 1, 2, 3)$ sind nicht leer. Sei $\mathscr{P}_1$ die Gesamtheit der Mengen: $\emptyset$, $\{x_1\}$, $E \cup \cup \{x_1\}$, $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, +\infty) \setminus \{x_1\}$, $(-\infty, +\infty) \setminus (E \cup \{x_1\})$. Wir führen als P die Mengeneigenschaft: „$E \in \mathscr{P} \cup \mathscr{P}_1$" ein. Die Menge E besitzt diese Eigenschaft nicht. Sei $f(x)$ die Funktion (1). Dann gehören die Mengen f_a und f^a zu $\mathscr{P}_1$ und haben die Eigenschaft P. Die Eigenschaft P ist nicht f-durchschnittlich, da die Menge $f^1_{-1} = E$ diese Eigenschaft nicht besitzt. Es ist klar, daß P eine Obereigenschaft von P_0 ist.

Da die Eigenschaft „E ist eine $G_{\delta\sigma}$-Menge" f-durchschnittlich ist und die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, erhalten wir noch einmal eine positive Antwort.

Literatur

[1] *L. Mišík:* Über f-durchschnittliche Eigenschaften, Czechoslovak Mathematical Journal *19* (*94*) (1969), 380—389.

Anschrift des Verfassers: Gdańsk, ul. Sobieskiego 18, Polska.