Jaromír Suchomel

Über die Zerlegungen von linearen homogenen Differentialoperatoren

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 21 (1971), No. 4, 696–699

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101070`

Czechoslovak Mathematical Journal, 21 (96) 1971, Praha

ÜBER DIE ZERLEGUNGEN VON LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALOPERATOREN

JAROMÍR SUCHOMEL, Brno

(Eigelangt am 7. Dezember 1970)

In dieser Arbeit werden alle Bezeichnungen und Begriffe, die in [1] eingeführt wurden, verwendet. Es sei ein Differentialoperator A n-ter Ordnung mit dem Definitionsbereich $C_n(I)$ gegeben. Das Produkt $A \circ u$ resp. $v \circ A$ von A mit der Funktion $u \in C_n(I)$ resp. $v \in C_0(I)$ ist der Operator, der durch die Formel $(A \circ u)\, y = A(uy)$ resp. $(v \circ A)\, y = v(Ay)$ für alle $y \in C_n(I)$ definiert wird. Insofern kein Mißverständnis zu befürchten ist, werden wir vA statt $v \circ A$ schreiben. Für Funktionen $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_n \in C_n(I)$ führen wir die Bezeichnungen $w_{s,s+i} = W(y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{s+i})$ für $s = 1, 2, \ldots, n-1$, $i = 1, 2, \ldots, n-s$, $w_{0i} = y_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, $v_i = W(y_1, y_2, \ldots, y_i)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ und $v_0 = 1$ für alle $x \in I$ ein. Jedes Symbol von der Form $\prod_{i=p}^{q} a_i$ mit $a_i \in C_0(I)$ und $p > q$ ist gleich 1 für alle $x \in I$ zu nehmen.

1. Lemma. *Es seien Funktionen $y_i \in C_s(I)$ für $i = 1, 2, \ldots, s$ und $u \in C_s(I)$ gegeben. Dann gilt*

$$W(uy_1, uy_2, \ldots, uy_s, D) \circ u = u^{s+1}\, W(y_1, y_2, \ldots, y_s, D)\,. \tag{1}$$

Beweis folgt aus dem Hilfssatz 1 der Arbeit [2].

2. Lemma. *Es seien Funktionen $y_i \in C_n(I)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqq 2$, gegeben. Dann gilt*

$$\begin{aligned} W(w_{s,s+1}, w_{s,s+2}, \ldots, w_{s,n}, D)\, W(y_1, y_2, \ldots, y_s, D) = \\ = v_s^{n-s}\, W(y_1, y_2, \ldots, y_n, D) \quad \text{für} \quad s = 1, 2, \ldots, n-1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Beweis. Bezeichnen wir $W(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}) = v_{n+1}$ und $W(y_1, y_2, \ldots, y_s, y_{n+1}) = w_{s,n+1}$ für $y_{n+1} \in C_n(I)$, so ist die Formel (2) äquivalent mit

$$W(w_{s,s+1}, w_{s,s+2}, \ldots, w_{s,n+1}) = v_s^{n-s} v_{n+1} \quad \text{für alle} \quad y_{n+1} \in C_n(I)\,. \tag{3}$$

Ist $v_{n+1}(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in I$, so existiert nach dem Satz 1 aus [3] ein nichtleeres Intervall $I_1 \subset I$, $x_0 \in \bar{I}_1$ ($\bar{I}_1$ ist die Abschließung von I_1), in dem $v_i(x) \neq 0$ für alle $x \in I_1$ und alle $i = 1, 2, \ldots, s$ in Kraft ist. Nach (2,3') S. 310 aus [4] ist (3) im I_1 richtig und aus der Stetigkeit beider Seiten von (3) folgt die Gültigkeit von (3) im Punkt x_0. Nehmen wir an, daß $v_{n+1}(x_0) = 0$ für $x_0 \in I$ ist. Bezeichnen wir

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_{n+1}(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_{n+1}'(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)}(x_0) & y_2^{(n)}(x_0) & \ldots & y_{n+1}^{(n)}(x_0) \end{bmatrix}$$

und $\bar{y}_k = y_k + \varepsilon[(x - x_0)^{k-1}/(k-1)!]$ für $k = 1, 2, \ldots, n + 1$, $x \in I$, $\varepsilon > 0$. Da die Matrix Y höchstens $n + 1$ reale charakteristische Wurzel haben kann, existiert ein $\lambda > 0$ derart, daß

$$W(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{n+1})(x_0) = \det(Y + \varepsilon E) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad \varepsilon \in (0, \lambda)$$

gilt, wobei E die Einheitsmatrix $(n + 1)$-ter Ordnung ist. Bezeichnen wir $W(W(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_s, \bar{y}_{s+1}), W(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_s, \bar{y}_{s+2}), \ldots, W(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_s, \bar{y}_{n+1})) = W_\varepsilon$. Nach dem Vorhergehenden ist $W_\varepsilon(x_0) = (W(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_s)(x_0))^{n-s} W(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_{n+1})(x_0)$ für $\varepsilon \in (0, \lambda)$ und daher

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} W_\varepsilon(x_0) = (v_s(x_0))^{n-s} \det Y = 0\,.$$

Da die Funktionen $W(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_s, \bar{y}_k)$ für $k = s + 1, s + 2, \ldots, n + 1$ Polynome in ε mit Koeffizienten aus $C_{n-s}(I)$ und den Absolutgliedern w_{sk} für $k = s + 1$, $s + 2, \ldots, n + 1$ sind, ist die Funktion W_ε ein Polynom in ε mit Koeffizienten aus $C_0(I)$ und dem Absolutglied $W(w_{s,s+1}, w_{s,s+2}, \ldots, w_{s,n+1})$. Hieraus folgt

$$W(w_{s,s+1}, w_{s,s+2}, \ldots, w_{s,n+1})(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} W_\varepsilon(x_0) = 0$$

und die Formel (3) ist auch im Punkt x_0 richtig.

3. Lemma. *Es seien gegeben: ganze Zahlen* $0 = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_s = n$, $2 \leqq s \leqq n$ *und Funktionen* $y_i \in C_n(I)$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Dann gilt*

$$h_j\, W(y_1, y_2, \ldots, y_{r_j}, D) = \prod_{k=j}^{1} W(b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{k,r_k - r_{k-1}}, D) \tag{4}$$

für $j = 1, 2, \ldots, s$, *wo*

$$\begin{aligned} b_{ki} &= h_{k-1} w_{r_{k-1}, r_{k-1}+i} \quad \textit{für} \quad i = 1, 2, \ldots, r_k - r_{k-1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots, j\,, \\ h_k &= \prod_{p=1}^{k-1} v_{r_p}^{(r_{p+1} - r_p) \prod_{q=p+1}^{k-1} (r_{q+1} - r_q + 1)} \qquad \textit{für} \quad k = 0, 1, \ldots, j\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Beweis. Nach (1) und (2) gilt

$$(6)\quad W(b_{j+1,1}, b_{j+1,2}, \ldots, b_{j+1,r_{j+1}-r_j}, D) \circ h_j \circ W(y_1, y_2, \ldots, y_{r_j}, D) =$$
$$= h_j^{r_{j+1}-r_j+1}\, W(w_{r_j,r_j+1}, w_{r_j,r_j+2}, \ldots, w_{r_j,r_{j+1}}, D)\, W(y_1, y_2, \ldots, y_{r_j}, D) =$$
$$= h_j^{r_{j+1}-r_j+1}\, v_{r_j}^{r_{j+1}-r_j}\, W(y_1, y_2, \ldots, y_{r_{j+1}}, D)$$

für $j = 1, 2, \ldots, s$. Mit Hilfe von (6) und der Formel

$$(7)\qquad h_{j+1} = h_j^{r_{j+1}-r_j+1}\, v_{r_j}^{r_{j+1}-r_j} \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, s$$

kann man das Lemma mittels Induktion in bezug auf j beweisen.

4. Satz. *Es seien gegeben: ganze Zahlen* $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_s = n$, $2 \lesseqqgtr s \leqq n$, *die homogene lineare Differentialgleichung*

$$(8)\qquad \sum_{i=0}^{n} a_i y^{(n-i)} = 0 \quad \textit{mit} \quad a_i \in C_0(I) \quad \textit{für} \quad i = 0, 1, \ldots, n \quad \textit{und}$$
$$a_0 \neq 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in I$$

und ein ihr beliebiges Hauptsystem $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C_n(I)$. *Dann existieren eine Funktion* $f \in C_0(I)$, *die nur isolierte Nullstellen haben kann, und Differentialoperatoren* P_j $(r_j - r_{j-1})$*-ter Ordnung mit dem Definitionsbereich* $C_{r_j}(I)$ *für* $j = 1, 2, \ldots, s$, *so daß folgendes gilt*:

$$f \circ \sum_{i=0}^{n} a_i D^{n-i} = P_s P_{s-1} \ldots P_1$$
$$(P_k P_{k-1} \ldots P_1)\, y_i = 0 \quad \textit{für} \quad k = 1, 2, \ldots, s\,,$$
$$i = 1, 2, \ldots, r_k \quad \textit{und alle} \quad x \in I\,.$$

Beweis. Der Satz folgt aus dem Lemma 2 von [1] und dem Lemma 3, wo $f = a_0^{-1} v_n h_s$, $P_j = W(b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{j,r_j-r_{j-1}}, D)$ für $j = 1, 2, \ldots, s$ und (5) zu nehmen ist.

5. Satz. *Es seien gegeben: ganze Zahlen* $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_s = n$, $2 \lesseqqgtr s \leqq n$, *die Differentialgleichung* (8) *und ihr Hauptsystem* $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C_n(I)$ *mit* $v_{r_k} \neq 0$ *für alle* $k = 1, 2, \ldots, s$ *und alle* $x \in I$. *Bezeichnen wir mit* A *den durch die Gleichung* (8) *erzeugten Operator. Dann existiert die Zerlegung von* A *in reguläre Operatoren*:

$$(9)\qquad A = a_0 \prod_{k=s-1}^{0} \left[\frac{v_{r_k}}{v_{r_{k+1}}} \circ W\left(\frac{w_{r_k,r_k+1}}{v_{r_k}}, \frac{w_{r_k,r_k+2}}{v_{r_k}}, \ldots, \frac{w_{r_k,r_{k+1}}}{v_{r_k}}, D\right)\right].$$

Beweis. Nach (14) von [2, S. 396] und (3) gilt

$$(10)\qquad W\left(\frac{w_{r_k,r_k+1}}{v_{r_k}}, \frac{w_{r_k,r_k+2}}{v_{r_k}}, \ldots, \frac{w_{r_k,r_{k+1}}}{v_{r_k}}\right) = \frac{v_{r_{k+1}}}{v_{r_k}}$$

für $k = 0, 1, \ldots, s - 1$ und nach (5), (7) und dem Lemma 1 ist

$$(11) \qquad \frac{1}{h_{k+1} v_{r_{k+1}}} W(h_k w_{r_k, r_k+1}, h_k w_{r_k, r_k+2}, \ldots, h_k w_{r_k r_{k+1}}, D) =$$

$$= \frac{v_{r_k}}{v_{r_{k+1}}} W\left(\frac{w_{r_k, r_k+1}}{v_{r_k}}, \frac{w_{r_k, r_k+2}}{v_{r_k}}, \ldots, \frac{w_{r_k r_{k+1}}}{v_{r_k}}, D\right) \circ \frac{1}{h_k v_{r_k}}$$

für $k = 0, 1, \ldots, s - 1$. Mit Hilfe (10), (11) kann man schon den Beweis dem Lemma 3 nach durchführen. Vgl. [2, S. 401, 402].

6. Folgerung. *Es seien die Differentialgleichung* (8) *und ihr Hauptsystem* $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C_n(I)$ *mit* $v_i \neq 0$ *für* $i = 1, 2, \ldots, n$ *und alle* $x \in I$ *gegeben. Dann gilt*

$$(12) \qquad \frac{1}{a_0} A = \prod_{k=n-1}^{0} \left[\frac{v_k}{v_{k+1}} \circ W\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}, D\right)\right].$$

Beweis folgt aus dem Satz 5, wo $r_k = k$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ und $s = n$ zu nehmen ist.

7. Bemerkung. Die Formel (12) wurde in der Form

$$\frac{1}{a_0} A = \prod_{k=n}^{1} \left[D - \left(\ln \frac{v_k}{v_{k-1}}\right)'\right]$$

in [5, S. 195] und in der Form

$$A = a_0 \prod_{k=n-1}^{0} \left[\frac{v_{k+1}}{v_k} \circ W(1, D) \circ \frac{v_k}{v_{k+1}}\right] = a_0 \frac{v_n}{v_{n-1}} D \circ \frac{v_{n-1}^2}{v_n v_{n-2}} D \circ \ldots \circ \frac{v_1^2}{v_2 v_0} D \circ \frac{v_0}{v_1}$$

in [6, S. 194, 196] bewiesen.

Literatur

[1] *J. Suchomel:* Über die Zerlegung von linearen homogenen Differentialoperatoren in Operatoren erster Ordnung. Im Druck.

[2] *V. Šeda:* Über die Transformationen der linearen Differentialgleichungen *n*-ter Ordnung I. Časop. pěstov. mat. *90* (1965), 385—412.

[3] *V. Jarník:* Lineární závislost funkcí jedné reálné proměnné. Časop. pěstov. mat. *80* (1955), 32—43.

[4] *P. Hartman:* Principal solutions of disconjugate n-th order linear differential equations. Amer. Journal of Math. Vol. XCI, No *2* (1969), 306—362.

[5] *G. Mammana:* Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari. Math. Z. *33* (1931), 186—231.

[6] *G. Ascoli:* Sulla decomposizione degli operatori differenziali lineari in fattori lineari e sopra alcune questioni geometriche che vi si riconnettono. Revista Matem. y Fisica teorica, Serie A (1940), 189—215.

Anschrift des Verfassers: Brno, Nám. 28. října 26, ČSSR.