Czechoslovak Mathematical Journal

Tibor Šalát

Bemerkung über die Verteilung von Ziffern in Cantorschen Reihen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), No. 3, 497–499

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101191

Czechoslovak Mathematical Journal, 23 (98) 1973, Praha

BEMERKUNG ÜBER DIE VERTEILUNG VON ZIFFERN IN CANTORSCHEN REIHEN

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Eingegangen am 4. September 1972)

Es sei $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, $q_k > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Dann kann jede Zahl $x \in \langle 0, 1)$ eindeutig in der Form ihrer Cantorschen Entwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k}$$

dargestellt werden, wo $\varepsilon_k(x)$ ganze Zahlen sind, $0 \leqq \varepsilon_k(x) \leqq q_k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und für unendlich viele k die Ungleichheit $\varepsilon_k(x) < q_k - 1$ gilt (siehe [1], S. 7). Bezeichnen wir mit $H(q_1, q_2, \ldots)$ bzw. $H^*(q_1, q_2, \ldots)$ die Menge aller $x \in \langle 0, 1)$, die die folgende Eigenschaft haben: $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_k' = \langle 0, 1 \rangle$ bzw. die Folge $\{\varepsilon_k(x)/q_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist gleichverteilt in $\langle 0, 1)$ ($\{a_k\}_k'$ bezeichnet die Menge aller Häufungswerte der Folge $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$). Offenbar ist

$$H^*(q_1, q_2, \ldots) \subset H(q_1, q_2, \ldots) .$$

In den Arbeiten [2], [3] wurden verschiedene Eigenschaften von Mengen $H(q_1, q_2, \ldots)$, $H^*(q_1, q_2, \ldots)$ beschrieben, die in dieser Arbeit ergänzt werden.

Satz 1. *Es sei*

(1) $$\limsup_{k \to \infty} q_k = +\infty .$$

Dann ist $H(q_1, q_2, \ldots)$ eine residuale $F_{\sigma\delta}$-Menge in $\langle 0, 1)$.

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen aus der Arbeit [2] (siehe den Beweis des Satzes 2 aus [2]).

Wir beweisen, dass $H(q_1, q_2, \ldots)$ eine residuale in $\langle 0, 1)$ Menge ist.

Wenn $z \in (0, 1)$, $0 < \eta < \min(z, 1 - z)$ ist, dann setzen wir

(2) $$R_k(\eta) = \left\{x \in \langle 0, 1);\ \left|\frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} - z\right| \geqq \eta\right\},$$

$$P_n(\eta) = \bigcap_{k=n}^{\infty} R_k(\eta) , \quad R(\eta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(\eta) .$$

Wir beweisen zuerst, dass $P_n(\eta)$ nirgendsicht ist.

Es sei I, $I \subset \langle 0, 1)$ ein beliebiges offenes Intervall. Wir wählen ein m so gross, dass dieses Intervall I schon irgendein Intervall i_m^s der m-ten Stufe enthält (siehe [2], S. 255). Es gehöre i_m^s zur Folge $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_m^0$ ([2], S. 255). Wählen wir j so gross, dass

$$\text{(a)} \qquad j > m\,, \quad j > n\,;$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{q_j} < \eta$$

ist. Das ist infolge der Voraussetzung (1) des Satzes möglich. Konstruieren wir jetzt das Intervall i_j^t der j-ten Stufe, das zur Folge

$$\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_m^0, 0, 0, \ldots, 0, v$$

gehört, wo v eine ganze nichtnegative Zahl mit

$$\text{(3)} \qquad v < q_j\,, \quad \left|\frac{v}{q_j} - z\right| < \eta$$

bedeutet (ihre Existenz folgt aus (b)). Für jedes $x \in i_j^t$ gilt die Gleichheit $\varepsilon_j(x) = v$ und so auf Grund von (a), (3) kann die Zahl x nicht zur Menge $P_n(\eta)$ gehören. Jetzt aber ist $i_j^t \subset i_m^s \subset I$ und $i_j^t \cap P_n(\eta) = \emptyset$. Daher ist $P_n(\eta)$ eine nirgendsdichte Menge in $\langle 0, 1)$.

Aus der Definition von $R(\eta)$ folgt, dass $R(\eta)$ $(\eta > 0)$ eine Menge von erster Kategorie ist.

Es sei $\eta_n \to 0$, $0 < \eta_n < \min(z, 1 - z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} R(\eta_n)$ eine Menge von erster Kategorie. Infolge dieser Tatsache ist die Menge

$$\text{(4)} \qquad H(z) = \langle 0, 1) - \bigcup_{n=1}^{\infty} R(\eta_n)$$

residual in $\langle 0, 1)$. Wenn $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die Folge aller rationalen Zahlen aus $(0, 1)$ bedeutet, dann ist auch

$$\text{(5)} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} H(r_n) = H(q_1, q_2, \ldots)$$

residual in $\langle 0, 1)$.

Die Menge $R_k(\eta)$ $(\eta > 0)$ besteht aus einigen Intervallen der k-ten Stufe. Daher ist sie eine G_δ-Menge in $\langle 0, 1)$. Aus (2), (4), (5) bekommt man unmittelbar, dass $H(q_1, q_2, \ldots)$ eine $F_{\sigma\delta}$-Menge ist.

Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Setzen wir

$$D(q_1, q_2, \ldots) = H(q_1, q_2, \ldots) - H^*(q_1, q_2, \ldots)\,.$$

Bezeichnen wir mit $|M|$ das Lebesguesche Mass der Menge M.

Satz 2. *Es sei* (1) *erfüllt.*

a) $D(q_1, q_2, \ldots)$ *ist eine residuale* $F_{\sigma\delta\sigma}$*-Menge in* $\langle 0, 1)$.

b) *Wenn*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} = o(n) \quad (n \to \infty) \tag{6}$$

gilt, dann ist $|D(q_1, q_2, \ldots)| = 0$.

Wenn (6) *nicht gilt, dann ist* $|D(q_1, q_2, \ldots)| = 1$.

Beweis. Der Teil a) des Satzes folgt aus dem Satz 1 und aus der Tatsache, dass $H^*(q_1, q_2, \ldots)$ eine $G_{\delta\sigma\delta}$-Menge von erster Kategorie in $\langle 0, 1)$ ist ([3], Satz 2,1).

Unter der Voraussetzung (1) gilt $|H(q_1, q_2, \ldots)| = 1$ ([2], Satz 3). Wenn (6) gilt, dann ist $|H^*(q_1, q_2, \ldots)| = 1$ ([3], Satz 2,3), darum $|D(q_1, q_2, \ldots)| = 0$. Wenn (6) nicht gilt, dann ist $|H^*(q_1, q_2, \ldots)| = 0$ ([3], Satz 2, 3), darum $|D(q_1, q_2, \ldots)| = 1$.

Literatur

[1] *I. Niven:* Irrational numbers, Carus Monographs, 11, 1956.

[2] *T. Šalát:* Eine metrische Eigenschaft der Cantorschen Entwicklungen der reellen Zahlen und Irrationalitätskriterien, Czechosl. Math. J. *14* (*89*), (1964), 254—266.

[3] *T. Šalát:* Zu einigen Fragen der Gleichverteilung (mod 1), Czechosl. Math. J. *18* (*93*), (1968), 476—488.

Anschiift des Verfassers: 816 31 Bratislava, Mlynská dolina, Pavilón matematiky, ČSSR (Katedra algebry a teórie čísel Prírodovedeckej fakulty Komenského univerzity).