Jerzy Muszyński

Поведение решений некоторой смешанной задачи с нелинейными граничными условиями

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), No. 3, 500–508

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101192

Czechoslovak Mathematical Journal, 23 (98) 1973, Praha

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

JERZY MUSZYŃSKI (Ежи Мушинский), Warszawa

(Поступило в редакцию 18/IX 1972)

Рассматривается асимптотическое поведение решений некоторой гиперболической смешанной задачи. Пусть $I = [0, l]$, $T = [0, \infty)$, где l-некоторая положительная постоянная. Предположим, что

П 1. $\alpha[\cdot]$ является оператором из $C^2(I \times T)$ в $C^0(I \times T)$ и что существуют постоянные a, A такие, что для всех $u \in C^2(I \times T)$

$$0 < a \leqq \alpha[u](x, t) \leqq A .$$

П 2. β является положительной функцией из $C^0(I)$. Поэтому существуют постоянные b, B такие что для всех $x \in I$

$$0 < b \leqq \beta(x) \leqq B .$$

П 3. $\varphi \in C^2(I)$, $\psi \in C^1(I)$.

П 4. $f, g \in C^1(-\infty, \infty)$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$; для всех $u \in (-\infty, \infty)$ $f'(u) \geqq 0$, $g'(u) \geqq 0$.

При этих предположениях рассмотрим в начале следующую однородную задачу:

$$u_{tt} + \alpha[u]\, u_t + \beta u = u_{xx} , \tag{1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) , \quad u_t(x, 0) = \psi(x) , \tag{2}$$

$$u_x(0, t) - f(u(0, t)) = 0 , \quad u_x(l, t) + g(u(l, t)) = 0 . \tag{3}$$

В наших исследованиях ограничимся поведением решения, предполагая что

П 5. Рассматриваемая задача имеет классическое решение из $C^2(I \times T)$.

Вопросы существования решений и их единственности не являются предметом этой статьи.

Теорема 1. *Если выполнены предположения* П 1 – П 5, *то решение задачи* (1) – (3) *ограничено в* $I \times T$ *и стремится к нулю при* $t \to \infty$ *равномерно для* $x \in I$.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ является решением задачи (1) – (3). Рассмотрим вдоль него следующую функцию:

$$(4) \qquad \phi(t) = \frac{1}{2}\int_0^l [u_t^2(x, t) + 2\varepsilon u_t(x, t)\, u(x, t) + \beta(x)\, u^2(x, t) + u_x^2(x, t)]\, dx + \\ + \int_0^{u(0,t)} f(s)\, ds + \int_0^{u(l,t)} g(s)\, ds\,,$$

где ε — любая постоянная, такая что

$$(5) \qquad 0 < \varepsilon < \min\left(\sqrt{b},\ \frac{4ab}{A + 4b}\right).$$

Из П 2 вытекает, что

$$(6) \qquad u_t^2 + 2\varepsilon|u_t|\,|u| + Bu^2 \geqq u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 \geqq u_t^2 - 2\varepsilon|u_t|\,|u| + bu^2$$

и ввиду (5) выражение $u_t^2 - 2\varepsilon|u_t|\,|u| + bu^2$ является положительно определенной квадратичной формой относительно u_t, u. Из П 4 вытекает, что интегралы $\int_0^u f(s)\, ds$, $\int_0^u g(s)\, ds$ неотрицательны. Отсюда для $t \in T$

$$\phi(t) \geqq 0\,.$$

Из П 5 вытекает, что $\phi(t) \in C^1(T)$. Ввиду (4) ее производная равна

$$(7) \qquad \dot{\phi}(t) = \int_0^l [u_t u_{tt} + \varepsilon u u_{tt} + \varepsilon u_t^2 + \beta u u_t + u_x u_{xt}]\, dx + \\ + f(u(0, t))\, u_t(0, t) + g(u(l, t))\, u_t(l, t)\,.$$

Здесь для сокращения записи пишем u вместо $u(x, t)$ итд. Так как u является решением уравнения (1), то $u_{tt} = u_{xx} - \alpha u_t - \beta u$ и поэтому из (7) имеем

$$(8) \qquad \dot{\phi}(t) = \int_0^l (u_t u_{xx} + u_x u_{xt})\, dx + \varepsilon \int_0^l u u_{xx}\, dx - \\ - \int_0^l [(\alpha - \varepsilon)\, u_t^2 + \varepsilon\alpha u_t u + \varepsilon\beta u^2]\, dx + f(u)\, u_t|_{x=0} + g(u)\, u_t|_{x=l}$$

Отсюда

$$(9) \qquad \dot{\phi}(t) = u_t u_x|_0^l + \varepsilon u u_x|_0^l - \int_0^l \varepsilon u_x^2\, dx - \int_0^l [(\alpha - \varepsilon)\, u_t^2 + \varepsilon\alpha u_t u + \varepsilon\beta u^2]\, dx + \\ + f(u)\, u_t|_{x=0} + g(u)\, u_t|_{x=l}\,.$$

Из (3) вытекает, что

$$(10) \qquad u_t u_x|_0^l + f(u)\, u_t|_{x=0} + g(u)\, u_t|_{x=l} =$$
$$= -g(u)\, u_t|_{x=l} - f(u)\, u_t|_{x=0} + f(u)\, u_t|_{x=0} + g(u)\, u_t|_{x=l} = 0$$

и

$$(11) \qquad \varepsilon u u_x|_0^l = \varepsilon\big(-g(u)\, u|_{x=l} - f(u)\, u|_{x=0}\big)\,.$$

Ввиду этого

$$(12) \qquad \dot{\phi}(t) = -\varepsilon(g(u)\, u|_{x=l} + f(u)\, u|_{x=0}) -$$
$$- \int_0^l [(\alpha - \varepsilon)\, u_t^2 + \varepsilon\alpha u_t u + \varepsilon\beta u^2 + \varepsilon u_x^2]\, \mathrm{d}x\,.$$

Из П 1, П 2 вытекает, что

$$(13) \qquad (\alpha - \varepsilon)\, u_t^2 + \varepsilon\alpha u_t u + \varepsilon\beta u^2 \geqq (a - \varepsilon)\, u_t^2 - \varepsilon A|u_t|\,|u| + \varepsilon b u_*^2\,.$$

Ввиду (5) и П 2 имеем $\varepsilon b > 0$, детерминант квадратичной формы в правой части неравенства равен $\varepsilon^2 A^2 - 4(a - \varepsilon)\,\varepsilon b = \varepsilon[\varepsilon(A + 4b) - 4ab]$. Учитывая (5) отсюда вытекает, что эта квадратичная форма положительно определена. Поэтому существует такая положительная постоянная k, что

$$(14) \qquad (a - \varepsilon)\, u_t^2 - \varepsilon A|u_t|\,|u| + \varepsilon b u^2 \geqq k(u_t^2 + 2\varepsilon|u_t|\,|u| + Bu^2)$$

и ввиду (6), (13) отсюда получаем

$$(15) \qquad (\alpha - \varepsilon)\, u_t^2 + \varepsilon\alpha u_t u + \varepsilon\beta u^2 \geqq k(u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2)\,.$$

Очевидно, что постоянная k может быть выбрана достаточно малой, выберём ее так, чтобы

$$(16) \qquad k \leqq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Имеем

$$\int_0^l [(\alpha - \varepsilon)\, u_t^2 + \varepsilon\alpha u_t u + \varepsilon\beta u^2 + \varepsilon u_x^2]\, \mathrm{d}x \geqq$$
$$\geqq \int_0^l [k(u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2) + \varepsilon u_x^2]\, \mathrm{d}x$$

и ввиду (16)

$$(17) \qquad \int_0^l [(\alpha - \varepsilon)\, u_t^2 + \varepsilon\alpha u_t u + \varepsilon\beta u^2 + \varepsilon u_x^2]\, \mathrm{d}x \geqq$$
$$\geqq k \int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2)\, \mathrm{d}x\,.$$

Из-за (12), (4) имеем

$$(18)\quad \dot\phi(t) \leqq -\varepsilon(g(u)\,u|_{x=l} + f(u)\,u|_{x=0}) - k\int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\varepsilon(g(u)\,u|_{x=l} + f(u)\,u|_{x=0}) -$$
$$- k\left[2\phi(t) - 2\int_0^{u(0,t)} f(s)\,\mathrm{d}s - 2\int_0^{u(l,t)} g(s)\,\mathrm{d}s\right].$$

После интегрирования по частям получаем

$$(19)\quad \dot\phi(t) \leqq -2k\,\phi(t) - \varepsilon[g(u)\,u|_{x=l} + f(u)\,u|_{x=0}] +$$
$$+ 2k[f(s)\,s|_0^{u(0,t)} + g(s)\,s|_0^{u(l,t)}] - 2k\left[\int_0^{u(0,t)} f'(s)\,s\,\mathrm{d}s + \int_0^{u(l,t)} g'(s)\,s\,\mathrm{d}s\right]$$

и

$$(20)\quad \dot\phi(t) \leqq -2k\,\phi(t) - (\varepsilon - 2k)\,[g(u)\,u|_{x=l} + f(u)\,u|_{x=0}] -$$
$$- 2k\left[\int_0^{u(0,t)} f'(s)\,s\,\mathrm{d}s + \int_0^{u(l,t)} g'(s)\,s\,\mathrm{d}s\right].$$

Из П 4 вытекает, что $\operatorname{sign} f(u) = \operatorname{sign} u$, $\operatorname{sign} g(u) = \operatorname{sign} u$ и поэтому $f(u)\,u \geqq 0$, $g(u)\,u \geqq 0$, а так как $\varepsilon \geqq 2k$, то $(\varepsilon - 2k)\,[g(u)\,u|_{x=l} + f(u)\,u|_{x=0}] \geqq 0$. По теореме о среднем для некоторых $\xi, \eta \in (0, u)$

$$(21)\quad \int_0^u f'(s)\,s\,\mathrm{d}s = f'(\xi)\int_0^u s\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}f'(\xi)\,u^2\,;\quad \int_0^u g'(s)\,s\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}g'(\eta)\,u^2$$

и ввиду П 4 имеем для любого u

$$(22)\quad \int_0^u f'(s)\,s\,\mathrm{d}s \geqq 0\,,\quad \int_0^u g'(s)\,s\,\mathrm{d}s \geqq 0\,.$$

Учитывая предыдущее получаем из (20)

$$(23)\quad \dot\phi(t) + 2k\,\phi(t) \leqq 0$$

то есть

$$(24)\quad e^{-2kt}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi e^{2kt}) \leqq 0$$

и отсюда

$$\phi(t)\,e^{2kt} \leqq \phi(0)$$

и

$$(25)\quad \phi(t) \leqq \phi(0)\,e^{-2kt}\,.$$

Как мы показали выше, квадратичные формы в (6) положительно определены, поэтому существует такая положительная постоянная m, что

(26) $$u^2 \leqq m(u_t^2 - 2\varepsilon|u_t|\,|u| + bu^2)$$

и учитывая (6)

(27) $$u^2 \leqq m(u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2) \leqq m(u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2)\,.$$

Аналогично

(28) $$u_x^2 \leqq u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2\,.$$

Интегрируя неравенства (27), (28) по x от 0 до l и учитывая то, что, как это было выше сказано, интегралы $\int_0^u f(s)\,\mathrm{d}s$, $\int_0^u g(s)\,\mathrm{d}s$ неотрицательны, получаем

(29) $$\int_0^l u^2\,\mathrm{d}x \leqq m\int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2)\,\mathrm{d}x \leqq$$
$$\leqq m\int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2)\,\mathrm{d}x +$$
$$+ 2m\left(\int_0^{u(0,t)} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{u(l,t)} g(s)\,\mathrm{d}s\right) = 2m\,\phi(t)$$

и

(30) $$\int_0^l u_x^2\,\mathrm{d}x \leqq \int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2)\,\mathrm{d}x \leqq$$
$$\leqq \int_0^l (u_t^2 + 2\varepsilon u_t u + \beta u^2 + u_x^2)\,\mathrm{d}x +$$
$$+ 2\left(\int_0^{u(0,t)} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{u(l,t)} g(s)\,\mathrm{d}s\right) = 2\phi(t)\,.$$

С учётом (25) отсюда вытекает, что

(31) $$\int_0^l u^2\,\mathrm{d}x \leqq 2m\,\phi(0)\,e^{-2kt}\,, \quad \int_0^l u_x^2\,\mathrm{d}x \leqq 2\phi(0)\,e^{-2kt}\,.$$

Применяя неравенство Буняковского-Шварца имеем

(32) $$\left(\int_0^l u\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqq \int_0^l 1^2\,\mathrm{d}x \int_0^l u^2\,\mathrm{d}x = l\int_0^l u^2\,\mathrm{d}x \leqq 2ml\,\phi(0)\,e^{-2kt}$$

и для $x \in I$

(33) $$(u(x, t) - u(0, t))^2 =$$
$$= \left(\int_0^x u_x(x, t)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqq \int_0^x \mathrm{d}x \int_0^x u_x^2\,\mathrm{d}x \leqq l\int_0^l u_x^2\,\mathrm{d}x \leqq 2l\,\phi(0)\,e^{-2kt}\,.$$

Отсюда

$$(34) \qquad |u(x, t) - u(0, t)| \leqq \sqrt{(2l\,\phi(0))}\, e^{-kt}$$

и

$$(35) \qquad \left|\int_0^l u(x, t)\,dx - lu(0, t)\right| = \left|\int_0^l (u(x, t) - u(0, t))\,dx\right| \leqq l\sqrt{(2l\,\phi(0))}\, e^{-kt}.$$

Так как

$$(36) \qquad |u(x, t)| \leqq$$
$$\leqq |u(x, t) - u(0, t)| + \frac{1}{l}\left|lu(0, t) - \int_0^l u(x, t)\,dx\right| + \frac{1}{l}\left|\int_0^l u(x, t)\,dx\right|$$

то ввиду (34), (35) и (32) получаем

$$(37) \qquad |u(x, t)| \leqq \sqrt{(2l\,\phi(0))}\, e^{-kt} + \sqrt{(2l\,\phi(0))}\, e^{-kt} + \frac{1}{l}\sqrt{(2ml\,\phi(0))}\, e^{-kt}.$$

Итак, существует положительная постоянная M, не зависящая от x, такая что

$$(38) \qquad |u(x, t)| \leqq Me^{-kt}$$

где k – некоторая положительная постоянная. Это доказывает теорему.

Для задачи (1)–(3) можно дополнительно доказать следующее:

Теорема 2. *В случае выполнения предположений* П 1 – П 5 *тривиальное решение* $u(x, t) \equiv 0$ *задачи* (1)–(3) (*при* $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$) *асимптотически устойчиво.*

Здесь приняты следующие определения: решение $u(x, t) \equiv 0$ называется *устойчивым* если для любого $\eta > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $|\varphi(x)| \leqq \delta$, $|\varphi'(x)| \leqq \delta$, $|\psi(x)| \leqq \delta$, то решение $v(x, t)$ задачи (1)–(3) с рассматриваемыми $\varphi(x)$, $\psi(x)$ удовлетворяет неравенству $|v(x, t)| \leqq \varepsilon$ для любых $(x, t) \in I \times T$. Тривиальное решение называется *асимптотически устойчивым* если оно устойчиво и кроме этого (применяя обозначения предыдущего предложения) $v(x, t) \to 0$ при $t \to \infty$ для любого $x \in I$.

Доказательство. Пусть дано $\eta > 0$, δ определим как положительное решение уравнения

$$(39) \qquad \eta^2 l^2 = (2l\sqrt{(2l)} + \sqrt{2(ml)})^2 \left[l\left(1 + \varepsilon + \frac{B}{2}\right)\delta^2 + \int_0^\delta (f(s) + g(s))\,ds\right],$$

где ε, m определены в доказательстве теоремы 1. Уравнение (39) имеет такое решение, причем единственное, так как правая сторона его как функция δ при изменении δ от 0 к ∞ монотонно возрастает ($f(s) \geqq 0$, $g(s) \geqq 0$ для $s \geqq 0$ ввиду П 4) от 0 к ∞, а левая сторона постоянна.

Если $|\varphi(x)| \leqq \delta$, $|\varphi'(x)| \leqq \delta$, $|\psi(x)| \leqq \delta$ то виду (37) имеем

$$|u(x, t)| \leqq \left(2\sqrt{(2l)} + \frac{1}{l}\sqrt{(2ml)}\right)\sqrt{(\phi(0))}\, e^{-kt} \tag{40}$$

и ввиду (4) и (2)

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \frac{1}{2}\int_0^l [\psi^2 + 2\varepsilon\psi\varphi + \beta\varphi^2 + \varphi'^2]\,\mathrm{d}x + \int_0^{\varphi(0)} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{\varphi(l)} g(s)\,\mathrm{d}s \leqq \\ &\leqq \frac{1}{2}\int_0^l [\delta^2 + 2\varepsilon\delta^2 + B\delta^2 + \delta^2]\,\mathrm{d}x + \int_0^\delta f(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^\delta g(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \frac{l}{2}\,\delta^2(2 + 2\varepsilon + B) + \int_0^\delta (f(s) + g(s))\,\mathrm{d}s\,.\end{aligned} \tag{41}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&|u(x, t)| \leqq \\ &\leqq \left(2\sqrt{(2l)} + \frac{1}{l}\sqrt{(2ml)}\right)\left[\frac{l}{2}\,\delta^2(2 + 2\varepsilon + B) + \int_0^\delta (f(s) + g(s))\,\mathrm{d}s\right]^{1/2} e^{-kt}\end{aligned} \tag{42}$$

и ввиду (39)

$$|u(x, t)| \leqq \eta e^{-kt} \tag{43}$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

Обобщим предыдущие результаты на неоднородную задачу. Пусть

П 6. $\gamma[\cdot]$ является оператором из $C^2(I \times T)$ в $C^0(I \times T)$ и пусть существует некоторая положительная постоянная G такая, что для всех $u \in C^2(I \times T)$

$$|\gamma[u]\,(x, t)| \leqq G\,.$$

Вместо уравнения (1) рассмотрим неоднородное уравнение

$$u_{tt} + \alpha[u]\,u_t + \beta u = u_{xx} + \gamma[u]\,. \tag{1'}$$

Теорема 3. *Если выполены предположения* П 1 – П 6 *то решение задачи* (1′), (2), (3) *ограничено.*

Доказательство. Будем поступать аналогично доказательству теоремы 1, рассматривая функцию $\phi(t)$ по формуле (4). Ее производная в силу уравнения

(1′) имеет вид (проводятся здесь те-же преобразования, как и в доказательстве теоремы 1)

(44)
$$\dot{\phi}(t) = -\varepsilon(g(u)\, u|_{x=l} + f(u)\, u|_{x=0}) -$$
$$- \int_0^l [(\alpha - \varepsilon)\, u_t^2 + \varepsilon\alpha u_t u + \varepsilon\beta u^2 + \varepsilon u_x^2]\, dx + \int_0^l \gamma(u_t + \varepsilon u)\, dx\,.$$

Оценим последний интеграл

(45)
$$\int_0^l \gamma(u_t + \varepsilon u)\, dx \leqq G \int_0^l |u_t|\, dx + G\varepsilon \int_0^l |u|\, dx\,.$$

Из неравества Буняковского-Шварца вытекает, что

(46)
$$\left(\int_0^l |u_t|\, dx\right)^2 \leqq \int_0^l dx \int_0^l u_t^2\, dx = l \int_0^l u_t^2\, dx\,; \quad \left(\int_0^l |u|\, dx\right)^2 \leqq l \int_0^l u^2\, dx\,.$$

Поэтому

(47)
$$\int_0^l \gamma(u_t + \varepsilon u)\, dx \leqq G \sqrt{l} \left(\int_0^l u_t^2\, dx\right)^{1/2} + G\varepsilon \sqrt{l} \left(\int_0^l u^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Рассуждения аналогичные тем, которые проведены в доказательстве теоремы 1 показывают, что существует некоторая постоянная $\overline{m} > 0$, такая что

(48)
$$\int_0^l u_t^2\, dx \leqq 2\overline{m}\, \phi(t)\,, \quad \int_0^l u^2\, dx \leqq 2\overline{m}\, \phi(t)$$

и поэтому

(49)
$$\int_0^l \gamma(u_t + \varepsilon u)\, dx \leqq G \sqrt{[2\overline{m} l\, \phi(t)]}\, (1 + \varepsilon)\,.$$

Обозначая

(50)
$$M = \sqrt{(2\overline{m} l)}\, (1 + \varepsilon)$$

получаем

(51)
$$\int_0^l \gamma(u_t + \varepsilon u)\, dx \leqq MG \sqrt{\phi(t)}\,.$$

Учитывая выводы из доказательства теоремы 1, находим, что

(52)
$$\dot{\phi} \leqq -2k\, \phi(t) + MG \sqrt{\phi(t)}\,.$$

Рассуждая как в [1] имеем

(53)
$$\phi(t) \leqq \max\left(\phi(0), \frac{MG}{2k}\right) \stackrel{\text{df}}{=} N^2\,.$$

Рассуждая аналогично тому как в доказательстве теоремы 1 получаем отсюда неравенство

$$|u(x, t)| \leqq N\sqrt{(2l)} + N\sqrt{(2l)} + \frac{1}{l}N\sqrt{(ml)} \tag{54}$$

что заканчивает доказательство.

Литература

[1] *J. Muszyński:* Badania jakościowe rozwiązań niektórych równań typu hiperbolicznego, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Matematyka, Nr 13, Warszawa 1967, 5—68. стр. 52.

Адресс автора: Politechnika Warszawska, Inst. Matematyki, Pl. Jedności Robotniczej 1, Warszawa, Polska.