

Thérèse Merlier

Nildemi-groupes totalement ordonnés

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 24 (1974), No. 3, 403–410

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101254>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1974

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

NILDEMI-GROUPES TOTALEMENT ORDONNÉS

THÉRÈSE MERLIER, Paris

(Reçu le 30. Janvier 1973)

La terminologie utilisée est celle de A. H. CLIFFORD et G. P. PRESTON [1] et de L. FUCHS [2].

Un nildemi-groupe S est un demi-groupe ayant un zéro, noté 0 , et dont tout élément est nilpotent: $\forall x \in S, \exists n \in \mathbf{N}^*; x^n = 0$.

(\mathbf{N}^* désigne les entiers naturels positifs.) Dans un nildemi-groupe, nous appellerons index de l'élément x , le plus petit entier n tel que $x^n = 0$ et nous noterons $i(x) = n$.

Nous nous proposons de déterminer les nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés, c'est-à-dire sur lesquels on peut définir une relation d'ordre total isotone:

$$a \leq b, \quad c \leq d \Rightarrow ac \leq bd \quad \text{pour tout } a, b, c, d.$$

Ceci répond au problème posé par E. JA. GABOVIČ dans [3], problème 13.

Si S_2 est l'ensemble des éléments d'index 2 d'un nildemi-groupe S totalement ordonné, $S_2 \cup \{0\}$ est un zéro-demi-groupe et par suite, on a: un nildemi-groupe S égal à $S_2 \cup \{0\}$ peut être totalement ordonné, si et seulement si, S est un zéro-demi-groupe. Nous ne nous intéresserons plus à ce cas dans la suite, mais nous retenons la condition nécessaire: $S_2 \cup \{0\}$ est un zéro-demi-groupe.

1. Quelques propriétés algébriques des nildemi-groupes totalement ordonnés. Soit S un nildemi-groupe totalement ordonné par la relation \leq , et soient $P = \{x \in S; x \leq 0\}$, $N = \{x \in S; x \geq 0\}$. Désignons par S^* l'ensemble des éléments de S d'index supérieur ou égal à 3 et posons $P^* = P \cap S^*$, $N^* = N \cap S^*$. (Ces notations seront conservées dans la suite.)

On a alors les propriétés suivantes:

- a) $PN = NP = \{0\}$.
- b) P est un demi-groupe positivement ordonné ($\forall a \in P, \forall b \in P, a \leq ab, b \leq ab$) et dualement, N est un demi-groupe négativement ordonné.
- c) Si a et b sont deux éléments d'index strictement supérieur à 2,

$$ab = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad ba = 0.$$

Si $ab = 0$ et si a et b sont d'index supérieur à 2 strictement, on a nécessairement $a \in P$ et $b \in N$ par exemple, car si a et b appartiennent à P on aurait $a < b < 0$ par exemple, d'où $0 = ab \leq b^2 \leq 0$ et b appartiendrait à S_2 .

Soit, I la relation binaire définie dans S^* par

$$a \equiv b (I) \Leftrightarrow \forall x \in S^*, \quad xa = 0 \Leftrightarrow xb = 0.$$

Il est clair que I est une relation d'équivalence de S^* et que si S est un nildemi-groupe, qui peut être totalement ordonné, $I = J$ où J est la relation définie par:

$$a \equiv b (J) \Leftrightarrow \forall x \in S^*, \quad ax = 0 \Leftrightarrow bx = 0,$$

d'après la propriété c) précédente.

De plus

Proposition 1. *Soit S un nildemi-groupe totalement ordonné; alors les classes mod. I sont P^* et N^* .*

En effet si $a \equiv b (I)$, ab est distinct de 0 puisque a^2 est distinct de 0; donc a et b appartiennent tous deux à N^* ou P^* . Réciproquement, si a et b appartiennent à P^* et si $ax = 0$, avec $x \in S^*$, x appartient nécessairement à N^* et par suite $bx = 0$ et ainsi $a \equiv b (I)$. Donc les classes mod. I sont bien N^* et P^* .

Ceci nous prouve en particulier que les éléments d'index strictement supérieur à 2 se partagent en éléments positifs et négatifs et ceci de façon algébrique, indépendamment de toute relation d'ordre.

Remarque. *Si S est un nildemi-groupe totalement ordonné, I admet une seule classe, si et seulement si „ $ab = 0 \Rightarrow a^2$ ou $b^2 = 0$ “ pour tout a et tout b de S .*

En effet I admet une seule classe, si et seulement si $S^* = P^*$ par exemple. Dans ce cas si $ab = 0$, a et b ne peuvent tous deux appartenir à S^* , donc a ou b est d'index 1 ou 2.

Nous noterons désormais (*) la condition

$$ab = 0 \Rightarrow a^2 \quad \text{ou} \quad b^2 = 0.$$

2. Caractérisation des nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés. Nous allons montrer dans ce paragraphe que pour caractériser les nildemi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés, il suffit de savoir caractériser ceux qui vérifient (*);

Théorème 1. *Si S est un nildemi-groupe vérifiant (*) et totalement ordonné, alors S peut également être totalement ordonné, de telle sorte que 0 soit élément minimum ou maximum.*

Supposons S totalement ordonné par \leq ; puisque S vérifie (*), d'après la remarque précédente P^* ou N^* (relatifs à \leq , mais aussi relatifs à toute autre relation d'ordre total d'après la Proposition 1) est vide. Supposons donc N^* vide; dans ce cas, si $i(x) > 2$, on a $x < 0$; et si $i(x) = 2$, on peut avoir $0 < x$ mais alors $xS = Sx = 0$. Définissons alors une nouvelle relation d'ordre total \leq sur S :

$$a \leq 0 \quad \forall a \in S,$$

$$a \leq b, \quad \text{si } a \text{ et } b \text{ sont différents de } 0 \text{ et } a \leq b.$$

Il est facile de vérifier que \leq fait de S un demi-groupe totalement ordonné.

On pourra donc toujours supposer si S est un nildemi-groupe totalement ordonné vérifiant (*), que 0 en est élément maximum ou minimum.

Notation. S^2 désigne l'ensemble des éléments de S admettant au moins une décomposition en deux facteurs a et b de S : $S^2 = \{x \in S, \exists a \in S, b \in S \text{ tels que } x = ab\}$. Ainsi, dire qu'un élément x appartient à $S - S^2$, c'est dire que x ne peut se décomposer en un produit de deux ou plusieurs facteurs; on dit encore (cf. T. TAMURA [7]) que x est premier.

Théorème 2. Soit S un nildemi-groupe et soit Σ_2 l'ensemble: $\{x \in S; x \neq 0, Sx = xS = 0 \text{ et } x \in S - S^2\}$.

Alors S peut être totalement ordonné, si et seulement si $S - \Sigma_2$ peut être totalement ordonné.

$S - \Sigma_2$ est toujours un sous demi-groupe de S ; donc si S est un nildemi-groupe totalement ordonné, il en est évidemment de même de $S - \Sigma_2$.

Supposons donc réciproquement que $S - \Sigma_2$ est totalement ordonné par \leq . Nous pouvons ordonner totalement $\Sigma_2 \cup \{0\}$, puisque c'est un zéro-demi-groupe. Définissons alors dans S une relation binaire \leq qui prolonge les relations d'ordre sur $S - \Sigma_2$, et $\Sigma_2 \cup \{0\}$ et telle que, de plus, si $a \in S - \Sigma_2$ et $a < 0$ dans $S - \Sigma_2$, si $b \in S - \Sigma_2$ et $0 < b$ dans $S - \Sigma_2$ et si $x \in \Sigma_2 \cup \{0\}$, alors $a < x < b$ dans S .

Cette relation est évidemment une relation d'ordre total dans S et il est facile de voir que les lois d'isotonie sont satisfaites, en utilisant le fait que $a \leq b$ dans $S - \Sigma_2$ implique $xa \leq xb, ax \leq bx$ pour tout x de S .

Définition. Un élément de Σ_2 est appelé „élément superflu“ du demi-groupe S . D'après le théorème 1, il nous suffit d'étudier les nildemi-groupes sans éléments superflus.

Lemme. Soit S un nildemi-groupe sans éléments superflus. Supposons que

a) $S_2^2 = \{0\}$.

b) Si a et b sont d'index strictement supérieur à 2, $ab = 0 \Leftrightarrow ba = 0$.

c) La relation d'équivalence I définie sur S^* admet exactement deux classes P^* et N^* , vérifiant $S^1P^*S^1 \cap S^1N^*S^1 = \{0\}$.

d) $\forall x \in S_2, xP^* \cup P^*x \neq \{0\} \Rightarrow (xN^* \cup N^*x) = \{0\}$.

Désignant alors par

$$\Sigma_P = \{x \in S_2; \exists y \in P^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cup \{S^1P^*S^1 \cap S_2\} \cup P^* \cup \{0\},$$

$$\Sigma_N = \{x \in S_2; \exists y \in N^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cup \{S^1N^*S^1 \cap S_2\} \cup N^* \cup \{0\},$$

on a: Σ_P et Σ_N sont deux nil demi-groupes, vérifiant $*$, tels que

$$S = \Sigma_P \cup \Sigma_N \text{ et } \Sigma_P \cap \Sigma_N = \{0\}.$$

Montrons tout d'abord que les deux classes P^* et N^* vérifient $P^*N^* = N^*P^* = 0$. Soient en effet $a \in P^*$ et $b \in N^*$; on a donc $a \neq b(I)$, et par suite, il existe $x \in S^*$ tel que $ax = 0$ et $bx \neq 0$. Comme $a^2 \neq 0$, $x \neq a(I)$, donc $x \in N^*$ et $x \equiv b(I)$, donc $ax = 0$ implique $ab = 0$, et $ba = 0$ d'après la condition b). On a d'ailleurs $P^*S^1N^* = N^*S^1P^* = 0$; en effet, si $x = u a v$, avec $a \in S$, $u \in P^*$, $u \in N^*$, alors si $a \in S^*$, $a \in P^*$ ou N^* , donc av ou $ua = 0$ puisque $P^*N^* = N^*P^* = 0$, et si $a \in S_2$, si av est distinct de 0, d'après la condition d) $ua = 0$. Donc dans tous les cas $x = 0$.

L'idéal engendré par P^* , $S^1P^*S^1$, est contenu dans Σ_P , car si $x \in S^1P^*S^1 \cap (S_2 \cup \{0\})$, il appartient par définition à Σ_P et si $x \in S^1P^*S^1 \cap S^*$, alors $x^2 \neq 0$ implique $x \in P^*$ car sinon $x^2 \in S^1P^*S^1N^* = 0$ d'après ce qui précède. De même, $S^1N^*S^1$ est contenu dans Σ_N et ainsi, Σ_P et Σ_N sont des nil demi-groupes, sous demi-groupes de S . Ils vérifient $*$, car si nous avons $ab = 0$ avec a et $b \in N^* [P^*]$, alors $a \equiv b(I)$ et $ab = 0$ implique $b^2 = 0$, ce qui n'est pas.

Pour montrer que $\Sigma_P \cap \Sigma_N = \{0\}$, il nous suffit de montrer que les sous ensembles suivants:

$$\{x \in S_2; \exists y \in P^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cap \{x \in S_2; \exists y \in N^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\},$$

$$\{x \in S_2; \exists y \in P^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cap \{S^1N^*S^1 \cap S_2\},$$

et

$$\{x \in S_2; \exists y \in N^*, xy \text{ ou } yx \neq 0\} \cap \{S^1P^*S^1 \cap S_2\}$$

sont vides.

Il résulte trivialement de la condition d) que le premier ensemble est vide. Le deuxième et le troisième ensembles sont vides, car si, par exemple, $x \in S_2 \cap S^1N^*S^1$, pour tout y de P^* on a $xy = yx = 0$, puisque $P^*S^1N^* = N^*S^1P^* = 0$.

Théorème 3. Soit S un nil demi-groupe, sans éléments superflus et ne vérifiant pas $ab = 0 \Rightarrow a^2$ ou $b^2 = 0$.

Alors S peut être totalement ordonné, si et seulement si

$$a) S_2^2 = \{0\}.$$

- b) Si a et b sont d'index strictement supérieur à 2, $ab = 0 \Leftrightarrow ba = 0$.
- c) La relation d'équivalence I admet exactement deux classes P^* et N^* telles que $S^1 P^* S^1 \cap S^1 N^* S^1 = \{0\}$.
- d) $\forall x \in S_2, xP^* \cup P^*x \neq \{0\} \Rightarrow xN^* \cup N^*x = \{0\}$.
- e) Σ_N et Σ_P peuvent être totalement ordonnés.

(Σ_N et Σ_P sont définis dans le lemme précédent.)

Condition Suffisante. Σ_N et Σ_P sont, d'après le lemme précédent, deux nildemi-groupes vérifiant (*) donc, d'après le Théorème 1 et la condition e), on peut ordonner totalement Σ_P avec 0 comme élément maximum et Σ_N avec 0 comme élément minimum. Comme d'après le lemme, $\Sigma_N \cup \Sigma_P = S$ et $\Sigma_N \cap \Sigma_P = \{0\}$, nous pourrons définir une relation d'ordre total sur S , \leq , prolongeant les relations sur Σ_N et Σ_P , en posant

$$a < 0 < b, \quad \forall a \neq 0, \quad a \in \Sigma_P, \quad \forall b \neq 0, \quad b \in \Sigma_N.$$

Il nous suffit de montrer que $\Sigma_N \Sigma_P = \Sigma_P \Sigma_N = \{0\}$, pour que l'on soit assuré de l'isotonie.

Soient $a \in \Sigma_P, b \in \Sigma_N$: si a et $b \in S_2, ab = ba = 0$ d'après la condition a); si $a \in P^*, b \in N^*, ab = ba = 0$ d'après la démonstration du lemme; si $a \in \Sigma_P \cap S_2$ et si $b \in N^*$. D'après la définition de Σ_P , on sait qu'alors, ou $a \in S^1 P^* S^1$ et alors on a vu que $S^1 P^* S^1 N^* = 0$ dans le lemme, donc $ab = 0$, ou il existe $y \in P^*$ tel que ay ou $ya \neq 0$; mais alors, d'après la condition d) a $N^* = 0$ et $ab = 0$.

Condition Nécessaire. Soit S un nildemi-groupe totalement ordonné. On a vu dans l'introduction que l'on avait nécessairement $S_2^2 = \{0\}$, d'où a). Comme S ne vérifie pas la condition (*), d'après la Proposition 1 et la Remarque qui la suit, on a c) qui est vérifié, avec $P^* = \{x \in S; i(x) \geq 3, x < 0\}$ et $N^* = \{x \in S; i(x) \geq 3, x > 0\}$. La condition b) est satisfaite comme on l'a vu au § 1. Enfin si $xP^* \cup P^*x \neq 0$, on a nécessairement $x < 0$, donc $xN^* = N^*x = 0$ et d) est satisfait. Les conditions a, b, c et d du lemme étant alors satisfaits, Σ_N et Σ_P sont sous demi-groupes de S , donc peuvent être totalement ordonnés.

Ce théorème nous prouve que le problème de savoir à quelle condition un nildemi-groupe S peut être totalement ordonné sera résolu s'il l'est pour les nildemi-groupes vérifiant $ab = 0$ implique a^2 ou $b^2 = 0$ (*). Pour étudier ces nildemi-groupes, nous distinguons le cas fini du cas quelconque.

3. Nildemi-groupes finis vérifiant (*) totalement ordonnés. Nous avons démontré dans [5] qu'un demi-groupe S fini d'ordre p est un nildemi-groupe, si et seulement si, S admet au plus un idempotent, et si le treillis des idéaux (non vides) de S est de longueur $p - 1$.

Donc, si S est un nildemi-groupe fini, d'ordre p , toute chaîne maximale d'idéaux est de longueur $p - 1$. On peut alors énoncer:

Théorème 4. Soit S un nildemi-groupe fini d'ordre p , vérifiant (*). S peut être totalement ordonné, si et seulement si l'une des chaînes maximales, $I_1 = \{0\}$, $I_2, \dots, I_p = S$ d'idéaux de S vérifie

$$\begin{aligned} \forall x \in S, \quad \forall r, \forall s \in \{1, 2, \dots, p\} \\ xI_r \subseteq I_s \Leftrightarrow x(I_r - I_{r-1}) \cap I_s \neq \emptyset \\ I_r x \subseteq I_s \Leftrightarrow (I_r - I_{r-1})x \cap I_s \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Condition Nécessaire. Si S est totalement ordonné, on peut d'après le théorème 1, supposer que 0 en est le plus petit élément. Dans ce cas, les sections commençantes $x \leq$ sont des idéaux de S , formant une chaîne maximale de $\{0\}$ à S de longueur $p - 1$. Si l'on a $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_p$, alors en posant $I_n = a_n \leq$, il est clair que, $xa_k \in I_s$ implique $xa_k \leq I_s$ et par suite $x(I_k - I_{k-1}) \cap I_s \neq \emptyset$ implique $xI_k \subseteq I_s$.

Condition Suffisante. Nous supposons qu'une chaîne maximale $I_1 = \{0\} \subset I_2, \dots, \subset I_p = S$ vérifie les conditions du Théorème 4, et nous posons $a_k = I_k - I_{k-1}$ et ordonnons S par $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_p$. Cette relation est isotone; il suffit de vérifier que $a_i < a_{i+1}$ implique $xa_i \leq xa_{i+1}$ et $a_{i+1}x \leq a_ix$. Or si $xa_{i+1} \in I_s$, $xa_i \in I_s$ car $a_i \in I_{i+1}$ et nous avons nécessairement $xa_i \leq xa_{i+1}$.

Ainsi, la conjonction des Théorèmes 2, 3 et 4 permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nildemi-groupe fini puisse être totalement ordonné.

4. Nildemi-groupes quelconques vérifiant(*), totalement ordonnés. Nous avons donné dans [6], comme corollaire de l'étude des demi-groupes réticulés, le théorème suivant

Théorème 5 (3. de [6]). Un demi-groupe S peut être totalement ordonné, si et seulement si il existe une famille $H_\lambda, \lambda \in \Lambda$, de parties non vides de S , telles que:

$\alpha)$ $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{C}_H^1$ est l'égalité.

$\beta)$ Pour tout λ de Λ , la famille des $(H_\lambda \dots a)_1, a \in S$, est une chaîne pour l'inclusion des ensembles dans $S^1 \times S^1$, et de plus, si a et b sont deux éléments quelconques de S , on a

$$\begin{aligned} (H_\lambda \dots a)_1 \cap (H_\lambda \dots b)_1 &= (H_\lambda \dots a)_1 \text{ pour tout } \lambda \text{ de } \Lambda \text{ ou,} \\ (H_\lambda \dots a)_1 \cap (H_\lambda \dots b)_1 &= (H_\lambda \dots b)_1 \text{ pour tout } \lambda \text{ de } \Lambda. \end{aligned}$$

Rappelons que S^1 est l'extension unitaire minimum de S , si $a \in S$ et si H est un sous ensemble de S , $(H \dots a)_1 = \{(x, y) \in S^1 \times S^1; xay \in H\}$ et \mathcal{C}_H^1 est la relation d'équivalence définie dans S par:

$$a \equiv b \mathcal{C}_H^1 \Leftrightarrow (H \dots a)_1 = (H \dots b)_1.$$

Dans le cas où S est un nil demi-groupe vérifiant (*), ce théorème prend la forme particulière suivante:

Théorème 6. *Soit S un nil demi-groupe vérifiant (*). S peut être totalement ordonné, si et seulement si, il existe une famille I_λ , $\lambda \in \Lambda$, d'idéaux de S vérifiant $ab \in I_\lambda \Rightarrow a^2$ ou $b^2 \in I_\lambda$ et les conditions α) et β) du Théorème 5.*

Ces conditions sont suffisantes d'après le théorème 5. Inversement, elles sont nécessaires, car si S est un nil demi-groupe totalement ordonné, la famille des sections commençantes, x^\leq , $x \in S$, est une famille d'idéaux qui vérifie bien ces conditions.

Ainsi, les Théorèmes 2, 3 et 6 caractérisent les nil demi-groupes qui peuvent être totalement ordonnés.

5. Complément — Cas particulier. Dans quelques cas simples, on peut donner directement une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nil demi-groupe puisse être totalement ordonné. Ainsi:

Théorème 7. *Soit S un nil demi-groupe admettant un seul élément d'index 2, à savoir „ a “.*

S peut être totalement ordonné, si et seulement si

- 1) *Tout élément de S est d'index inférieur ou égal à 3.*
- 2) *Si x et y sont deux éléments de $S - \{0, a\}$, $xy = a$.*
- 3) *$\forall x \in S$, $xa = ax = 0$.*

Condition Suffisante. Ordonnons S de la façon suivante; soit $S_3 = \{\text{éléments d'index 3}\}$; nous posons $0 < a < x$ pour tout x de S_3 . L'isotonie se vérifie aisément grâce aux propriétés 2) et 3).

Condition Nécessaire. Montrons tout d'abord que tout élément est d'index inférieur ou égal à 3. Soit x , tel que $i(x) = 2p$ avec $p > 1$. Alors $(x^p)^2 = 0$ et comme $x^p \neq 0$, $x^p = a$. Mais $(x^{p+1})^2 = 0$ et $x^{p+1} \neq 0$ car $x^{p+1} = 0$ implique $i(x) \leq p + 1$, soit $2p \leq p + 1$, ce qui n'est pas. Donc $x^{p+1} = a = x^p$; on a alors $x^{2p} = x^{2p-1} = 0$ et $i(x) \leq 2p - 1$. Ainsi tout élément d'index pair est nécessairement d'index 2. Soit maintenant x , tel que $i(x) = 2p + 1$ avec $p > 1$. Si $x^{2p+1} = 0$, $(x^{p+1})^2 = 0$ et $x^{p+1} \neq 0$, car $x^{p+1} = 0$ implique $p + 1 \geq 2p + 1$, i.e. $p \leq 0$. Donc $x^{p+1} = a$, et de même $x^{p+2} = a$ et $x^{p+1} = x^{p+2}$ ce qui impossible. La condition 1 est donc satisfaite.

Comme dans tout demi-groupe totalement ordonné, xy est compris entre x^2 et y^2 et comme $i(x) = 3$ implique $i(x^2) = 2$, on a pour tout x, y de S_3 , $x^2 = y^2 = xy = a$. Enfin, si $x \in S_3$, $a^2 \leq xa \leq x^2$ donc $xa = a$ ou $xa = 0 = a^2$. Mais $xa = a$ est impossible, car cela implique $x^3a = a = 0$, donc $xa = 0$.

References

- [1] *A. H. Clifford et G. B. Preston*: The algebraic theory of semigroups AMS 1961. Vol. 1.
- [2] *L. Fuchs*: Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Vandenhoeck und Ruprecht. Göttingen 1966.
- [3] *E. Ja. Gabovič*: Unsolved problems in the theory of semigroups (Russian). Sverdlovsk 1969.
- [4] *T. Merlier*: Nildemi-groupes totalement ordonnés. C. R. Acad. Sc. Paris t. 274, p. 1779—1782, 19 Juin 72, Série A.
- [5] *T. Merlier*: Sur les idéaux des demi-groupes nilpotents. Semigroup Forum (to appear).
- [6] *T. Merlier*: Sur les demi-groupes réticulés et les o-demi-groupes. Semigroup Forum. Vol. 2, 1971, p. 64—70.
- [7] *T. Tamura*: The theory of construction of finite semigroups. Osaka Math. J. 10, 1958, p. 191—204.

Adresse de l'auteur: (Mlle) Thérèse Merlier, Université de Paris VI, Mathématiques Pures, 4 Place Jussieu, 75230 Paris — Cedex 05, France.