Czechoslovak Mathematical Journal

Harald K. Wimmer

Spektralradius und Spektralnorm

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 24 (1974), No. 3, 501–502

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101264`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1974

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

Czechoslovak Mathematical Journal, 24 (99) 1974, Praha

SPEKTRALRADIUS UND SPEKTRALNORM

HARALD K. WIMMER, Graz

(Eingegangen am 29. Oktober 1973)

Mit $\varrho(A)$ bezeichnen wir den Spektralradius einer quadratischen Matrix A und mit $\|A\|$ die Spektralnorm von A, $\|A\| = \sqrt{\varrho(A^*A)}$. In dieser Note geben wir einen neuen Beweis für den folgenden Satz von V. PTÁK [2].

Satz 1 [2]. *Ist A eine komplexe $n \times n$ Matrix mit $\|A\| = 1$, so ist*

$$\|A^n\| = 1 \tag{1}$$

gleichwertig mit

$$\varrho(A) = 1 \,. \tag{2}$$

Daß (2) für (1) hinreicht ist leicht einzusehen. Die Implikation „(1) $\Rightarrow$ (2)" ist als Spezialfall in dem folgenden Satz enthalten.

Satz 2. *Hat eine $n \times n$ Matrix A mit $\|A\| = 1$ genau $r \geqq 0$ Eigenwerte mit Betrag 1, so gilt*

$$\operatorname{rang}\left(E - A^{*n}A^n\right) = n - r \,. \tag{3}$$

Beweis. Wegen $\|A\| = 1$ ist die Hermitesche Matrix $E - A^*A$ positiv semidefinit, also $E - A^*A = W^*W$. Ist $e^{i\phi}$ ein Eigenwert von A und u ein zugehöriger Eigenvektor, d. h.

$$Au = e^{i\phi}u \,, \tag{4}$$

so gilt

$$u^*W^*Wu = u^*(E - A^*A)\,u = u^*u - (e^{-i\phi}u^*)(e^{i\phi}u) = 0 \,.$$

Daraus folgt $Wu = 0$ und weiter

$$(E - A^*A)\,u = 0 \,. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) erhält man $u^*A = e^{i\phi}u^*$. u ist somit Rechts- und u^* Linkseigenvektor von A. Sind $e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_r}$, die Eigenwerte von A auf dem Einheitskreis, so ist $U^*AU = \operatorname{diag}\left(e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_r}\right) \oplus \hat{A}$ mit unitärem U und $\varrho(\hat{A}) < 1$.

Wir untersuchen nun den Rang von $E - A^{*n}A^n$. Für jede natürliche Zahl k gilt

$$E - A^{*k}A^k = (E - A^*A) + (A^*A - A^{*2}A^2) + \ldots + (A^{*k-1}A^{k-1} - A^{*k}A^k) =$$
$$= W^*W + A^*W^*WA + \ldots + A^{*k-1}W^*WA^{k-1} =$$
$$= (W^*, A^*W^*, \ldots, A^{*k-1}W^*) \begin{pmatrix} W \\ WA \\ \vdots \\ WA^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Es ist somit

(6) $$\operatorname{rang}(E - A^{*k}A^k) = \operatorname{rang}(W^*, A^*W^*, \ldots, A^{*k-1}W^*).$$

Für $k \geqq n$ ergibt der Satz von Hamilton-Cayley

(7) $$\operatorname{rang}(W^*, A^*W^*, \ldots, A^{*k-1}W^*) = \operatorname{rang}(W^*, A^*W^*, \ldots, A^{*n-1}W^*).$$

Aus (6) und (7) folgt

(8) $$\operatorname{rang}(E - A^{*k}A^k) = \operatorname{rang}(E - A^{*n}A^n), \quad k \geqq n.$$

Wegen $\varrho(\hat{A}) < 1$ ist $\lim_{k\to\infty} \hat{A}^k = 0$ und für hinreichend großes k, $k \geqq N$, sind r Eigenwerte von $(U^*AU)^{*k}(U^*AU)^k$, bzw. von $A^{*k}A^k$ gleich 1 und $n - r$ Eigenwerte dem Betrag nach beliebig klein. Für $k \geqq N$ ist daher $\operatorname{rang}(E - A^{*k}A^k) = n - r$ und aus (8) erhält man (3).

Da man aus $\|A^n\| = 1$ auf $\operatorname{rang}(E - A^{*n}A^n) < n$ schließen kann, ergibt sich nun unmittelbar Satz 1.

Bemerkungen. Einen anderen Beweis von Satz 1 findet man auch in [1]. — Der Exponent n in (1) kann nicht verkleinert werden, d. h. es gibt eine $n \times n$ Matrix B, für die $\|B\| = \|B^{n-1}\| = 1$ gilt, für die aber $\varrho(B) < 1$ ist. Als Beispiel wähle man [2] $B = (\delta_{i,j+1})$.

Literatur

[1] *H. Flanders,* On the norm and spectral radius, erscheint in Linear and Multilinear Algebra.
[2] *V. Pták,* Norms and the spectral radius of matrices, Czech. Math. J. *87* (1962), 555—557.

Anschrift des Verfassers: 2. Math. Institut, Technische Hochschule Graz, Kopernikusgasse 24, A-8010 Graz, Österreich.