Dietmar Kahnert

Addition linearer Cantormengen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 24 (1974), No. 4, 563–572

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101275`

Czechoslovak Mathematical Journal, 24 (99) 1974, Praha

ADDITION LINEARER CANTORMENGEN

DIETMAR KAHNERT, Stuttgart

(Eingegangen am 14. August 1973)

Ist C eine Cantormenge, C^* die von C erzeugte additive Untergruppe der reellen Zahlen $\mathbf{R}$ und L das Lebesgue-Maß, so wird untersucht, welche Bedingungen an C gestellt werden müssen, damit $L(C^*) = 0$ oder $L(C^*) > 0$ ist. Ferner wird gezeigt, daß es zu jeder Cantormenge C eine Cantormenge B mit $L(B) = 0$ gibt, so daß $B + C = \{b + c : b \in B, c \in C\}$ ein Intervall enthält.

1. Cantormengen. Wir nennen eine Teilmenge C der reellen Zahlen eine Cantormenge, wenn sie eine Darstellung der Form $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C(k)$ besitzt, wobei folgende Bedingungen (1)–(4) gelten müssen.

(1) $C(0)$ ist ein abgeschlossenes Intervall. Für $k \in \mathbf{N}$ besteht $C(k)$ aus $N_k = n_1 n_2 \dots n_k$ $(n_k \geqq 2)$ disjunkten abgeschlossenen Intervallen, genannt Intervalle k-ter Stufe, die alle die gleiche Länge l_k besitzen.

(2) Jedes Intervall k-ter Stufe enthält genau n_{k+1} Intervalle $(k + 1)$-ter Stufe.

(3) Benachbarte Intervalle $(k + 1)$-ter Stufe, die in demselben Intervall k-ter Stufe liegen, haben denselben Abstand a_{k+1}.

(4) Die Randpunkte aller Intervalle von $C(k)$ gehören zu C.

Jede derartige Cantormenge ist „ensemble parfait de translation“ im Sinne von KAHANE-SALEM [3]. Die Umkehrung gilt nicht. Im Falle $n_k = 2$, $l_k = 1/3^k$ und $a_k = l_k$ erhält man die klassische Cantormenge.

2. Körper vom Lebesgue-Maß Null. Setzt man $\xi_k = l_k/l_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$, so wird von Kahane-Salem (s. [3], S. 103 und auch [1], S. 90) die Implikation

$$n_k = 2\,, \quad \xi_k \to 0 \Rightarrow L(C^*) = 0 \tag{5}$$

bewiesen. Wir zeigen mit Satz 1, daß unter diesen Vorraussetzungen sogar der von C erzeugte Unterkörper C^K der reellen Zahlen Lebesgue-Maß Null besitzt. Der beim Beweis auftretende Begriff „metrische Dimension" (in Zeichen: $\dim_m$) stammt von WEGMANN [8]. Ist C eine Cantormenge, so gilt

$$\dim_m C = \limsup_{q \to 0} \frac{\log N_q(C)}{-\log q} = \limsup_{k \to \infty} \frac{\log N_k}{-\log(l_k + a_k)}$$

([4], die dort erwähnte Bedingung $a_k \geqq l_k$ ist unnötig), wobei für $q > 0$

$$N_q(C) = \min\{m : \text{es existieren } C_i \text{ mit} \bigcup_{i=1}^{m} C_i = C \text{ und } |C_i| \leqq q\}$$

ist.

Hilfssatz 1. *Ist die Folge (n_k) beschränkt und* $\lim_{k\to\infty} \xi_k = 0$, *so folgt* $\dim_m C = 0$.

Beweis. Für $k = 1, 2, \ldots$ erhält man

$$a_k = (l_{k-1} - n_k l_k)/(n_k - 1) = (l_0 \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{k-1}(1 - n_k \xi_k))/(n_k - 1)$$

und

$$l_k + a_k = (l_0 \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{k-1}(1 - \xi_k))/(n_k - 1) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ist M eine obere Schranke für die Folge (n_k) und N_0 so gewählt, daß bei gegebener Zahl n für alle $m > N_0$ stets $\xi_m < 1/n$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned}\dim_m C &= \limsup_{k\to\infty} \frac{\log N_k}{-\log((l_0\xi_1\xi_2 \ldots \xi_{k-1})(1 - \xi_k))/(n_k - 1)} \leqq \\ &\leqq \limsup_{k\to\infty} \frac{k \log M}{-\log l_0 \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{k-1}} \leqq \\ &\leqq \limsup_{k\to\infty} \frac{k \log M}{(k - N_0)\log n} = \frac{\log M}{\log n}.\end{aligned}$$

Damit ist $\dim_m C = 0$.

Bemerkungen. Setzt man die Folge (n_k) nicht als beschränkt voraus, so gilt die Folgerung in Hilfsatz 1 nicht. Umgekehrt folgt, selbst wenn (n_k) beschränkt ist, aus $\dim_m C = 0$ nicht notwendig $\xi_k \to 0$. Man konstruiert nämlich leicht eine Cantormenge C mit $n_k = 2$, $\limsup_{k\to\infty} \xi_k = \frac{1}{2}$ und $\dim_m C = 0$. Sei etwa $l_0 = 1$ und

$$l_{k+1} = \begin{cases} (\frac{1}{2} - 1/(k+3))\, l_k & \text{für } k = 0, 2, 4, \ldots \\ l_k/(k+1)^{k+1} & \text{für } k = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Dann ist

$$\limsup_{k\to\infty} \xi_k = \tfrac{1}{2}$$

und

$$l_k \leqq (k-2)^{2-k} \quad (k \geqq 3)\,.$$

Es folgt

$$\dim_m C \leqq \limsup_{k\to\infty} \frac{\log 2^{k+1}}{-\log l_k} \leqq \limsup_{k\to\infty} \frac{(k+1)\log 2}{(k-2)\log(k-2)} = 0\,.$$

Ist lediglich $\liminf_{k\to\infty} \xi_k = 0$, so kann, selbst bei beschränkter Folge (n_k), nichts über $\dim_m C$ geschlossen werden. Man findet z. B. leicht eine Cantormenge C mit dieser Eigenschaft derart, daß stets $n_k = 2$ und $\dim_m C = 1$ ist.

Das folgende Ergebnis wird bereits in 2.4 von [4] erwähnt, der Beweis jedoch dort nicht ausgeführt.

Hilfssatz 2. *Ist X eine Teilmenge der reellen Zahlen und* $\dim_m X = 0$, *so ist auch* $\dim_m X^K = 0$.

Beweis. Sei

$$Z - Y = \{z - y : z \in Z,\ y \in Y\}\,, \quad \frac{Z}{Y} = \left\{\frac{z}{y} : z \in Z,\ y \in Y \setminus \{0\}\right\} \ (Z, Y \subset \mathbf{R})\,,$$

$$X_1 = X \cup (X - X) \cup \frac{X}{X}$$

und

$$X_n = X_{n-1} \cup (X_{n-1} - X_{n-1}) \cup \frac{X_{n-1}}{X_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots)\,.$$

Dann ist

$$X^K = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\,.$$

Wegen

$$\dim_m \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \sup\{\dim_m X_n : n = 1, 2, \ldots\}$$

[8] genügt es zu zeigen, daß $\dim_m X_n = 0$ für alle n ist. Wie in [4] bewiesen wird, gilt für Teilmengen A und B der reellen Zahlen stets

$$\dim_m (A - B) \leqq \dim_m A \times B$$

und

$$\dim_m \frac{A}{B} \leqq \dim_m A \times B\,.$$

Ferner gilt

$$\dim_m A \times B \leqq \dim_m A + \dim_m B$$

[8]. Damit erhält man $\dim_m X_1 = 0$. Induktiv folgt $\dim_m X_n = 0$ für alle n.

Ist $X \subset \mathbf{R}$ und $\alpha > 0$, so bezeichne $L_\alpha(X)$ das α-dimensionale Hausdorff-Maß und $\dim X = \sup \{\alpha > 0 : L_\alpha(X) > 0\}$ ($\sup \emptyset = 0$) die Hausdorff-Dimension von X. Ist $\dim_m X = 0$, dann gilt, wegen $\dim_m X \geqq \dim X$ [8], $L_\alpha(X) = 0$ für alle $\alpha > 0$. Speziell folgt aus $\dim_m X = 0$ also $L(X) = L_1(X) = 0$. Die Hilfssätze 1 und 2 ergeben damit folgendes Resultat.

Satz 1. *Ist die Folge (n_k) beschränkt und $\lim_{k\to\infty} \xi_k = 0$, dann ist $L(C^K) = 0$.*

Bemerkung. Ein von einer perfekten Menge erzeugter Unterkörper der reellen Zahlen wurde erstmals von Souslin [6] konstruiert.

3. Gruppen, die von Cantormengen erzeugt werden. Ist die Folge (n_k) beschränkt, so sind die Aussagen $\xi_k \to 0$ und $l_k/a_k \to 0$ gleichwertig. Der folgende Satz verallgemeinert also (5).

Satz 2. *Ist C eine Cantormenge, dann gilt*

(a) $$\liminf_{k\to\infty} l_k/a_k > 0 \Rightarrow C^* = \mathbf{R},$$

(b) $$\lim_{k\to\infty} l_k/a_k = 0 \quad \Rightarrow L(C^*) = 0.$$

Zum Beweis verwenden wir den folgenden Hilfssatz. Dabei sei

$$C_n = C + C + \ldots + C$$

und

$$C_n(k) = C(k) + C(k) + \ldots + C(k) \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots$$

(jeweils n Summanden).

Hilfssatz 3. *Ist C eine Cantormenge und gilt $2n \,.\, l_k < a_k$ für alle k, dann ist auch C_n eine Cantormenge. Die Mengen k-ter Stufe $C_n(k)$ von C_n bestehen aus*

$$N_{k,n} = \prod_{i=1}^{k} (n(n_i - 1) + 1).$$

Intervallen der Länge $l_{k,n} = n \,.\, l_k$, die den minimalen Abstand $a_{k,n} = a_k - (n-1) \,.\, l_k$ besitzen.

Beweis von Satz 2. Es genügt in beiden Beweisteilen eine Cantormenge C zu betrachten, die in $[0, 1]$ enthalten ist und die Elemente 0 und 1 als Randpunkte besitzt. Denn sei $a = \min C$ und $b = \max C$, so ist $A = (1/(b-a)) . (C - \{a\})$ eine Cantormenge mit den Randpunkten 0 und 1. Es gilt dann

$$A^* \subset \frac{1}{b-a} \cdot C^* + \left\{\frac{a}{b-a}\right\}^* \quad \text{und} \quad C^* \subset (b-a) . A^* + \{a\}^* .$$

Also ist die Aussage $L(A^*) = 0$ äquivalent mit $L(C^*) = 0$. Ferner ist C^* eine L-meßbare Menge. Nach einem Satz von STEINHAUS [7] enthält damit $C^* - C^* = C^*$ im Falle $L(C^*) > 0$ ein Intervall. Damit ist entweder $C^* = \mathbf{R}$ oder aber $L(C^*) = 0$.

Beweis von (a). Sei n eine natürliche Zahl und $1/n < l_k/a_k$ für alle k von einem Index m an. Man sieht leicht, daß für alle $k \geqq m$ die Summenmenge $C_n(k)$ das Intervall m-ter Stufe $[0, l_m]$ enthält. Damit gilt

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_n(k) \supset [0, l_m] .$$

Also ist $C^* = \mathbf{R}$.

Beweis von (b). Die Doppelfolge $(C_{n,k})$ sei definiert durch

$$C_{1,k} = C(k) \quad \text{und} \quad C_{n+1,k} = C_{n,k} + (-1)^n . C(k) \quad (k = 1, 2, \ldots) .$$

Setzt man

$$C_{n,\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_{n,k} ,$$

dann ist

$$C_{n,\infty} = C - C + C - \ldots + (-1)^{n-1} C \quad (n \text{ Summanden}) ,$$

also

$$C^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{n,\infty} .$$

Es genügt also $L(C_{n,\infty}) = 0$ für alle n zu beweisen. Wegen

$$-C(k) = C(k) - 1 ,$$

folgt leicht

$$L(C_{n,\infty}) = 0 \Leftrightarrow L(C_n) = 0 .$$

Sei nun n fest gewählt. Es gibt ein m, so daß $4nl_k < a_k$ für alle $k \geqq m$ ist. O.B.d.A. setzen wir $m = 1$. Denn ist I ein Intervall m-ter Stufe von C, so sind die Aussagen $L(C^*) = 0$ und $L((C \cap I)^*) = 0$ äquivalent. Damit ist

$$n_k l_k = l_{k-1} - (n_k - 1) a_k \leqq l_{k-1} - (n_k - 1) 4nl_k ,$$
$$n_k l_k (1 + 4n) \leqq l_{k-1} + 4nl_k \leqq 2l_{k-1} ,$$

also

$$n_k l_k \leqq 2 l_{k-1}/(1 + 4n) \leqq l_{k-1}/2n$$

und folglich

$$N_k l_k \leqq (2n)^{-k}\, l_0\,.$$

Unter Verwendung von Hilfssatz 3 erhält man

$$L(C_n) = \lim_{k\to\infty} N_{k,n} n l_k \leqq \limsup_{k\to\infty} n^{k+1} N_k l_k \leqq \limsup_{k\to\infty} n l_0\, 2^{-k} = 0\,.$$

Beweis von Hilfssatz 3. Sei n fest. Wir führen den Beweis durch Induktion nach k. Es bezeichne I_j das Intervall j-ter Stufe von $C(j)$ mit $0 \in I_j$ und $q_j = l_j + a_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

Sei $k = 1$. Dann ist

$$C(1) = \bigcap_{i=0}^{n_1-1} (i q_1 + I_1)$$

und

$$C_n(1) = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i_1(j)=0}^{n_1-1} \left((i_1(1) + i_1(2) + \ldots + i_1(n))\, q_1 + n I_1\right) =$$

$$= n I_1 \cup (q_1 + n I_1) \cup (2 q_1 + n I_1) \cup \ldots \cup (n(n_1 - 1)\, q_1 + n I_1)\,.$$

Die Menge $C_n(1)$ besteht also aus $n(n_1 - 1) + 1$ disjunkten Intervallen der Länge $n l_1$. Die linken Randpunkte dieser Intervalle sind von der Form

$$(i_1(1) + i_1(2) + \ldots + i_1(n))\, q_1\,.$$

Benachbarte Intervalle besitzen den Abstand

$$a_{1,n} = q_1 - n l_1 = a_1 - (n-1)\, l_1\,.$$

Wir nehmen nun an, daß $C_n(j)$ für $j = 1, 2, \ldots, k$ Mengen j-ter Stufe einer geeigneten Cantormenge sind, die durch Zahlen $N_{j,n}$, $l_{j,n}$ und $a_{j,n}$, wie sie im Hilfssatz angegeben werden, charakterisiert werden. Die Induktionsannahme enthalte ferner, daß die linken Randpunkte der Intervalle von

$$C_n(k) = \bigcup_{m=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{k} \bigcup_{i_l(m)=0}^{n_l-1} \left((i_1(1) + \ldots + i_1(n))\, q_1 + \ldots + (i_k(1) + \ldots + i_k(n))\, q_k + n I_k\right)$$

gerade von der Form

$$(i_1(1) + \ldots + i_1(n))\, q_1 + \ldots + (i_k(1) + \ldots + i_k(n))\, q_k$$

sind.

Es ist

$$C_n(k+1) = \bigcup_{m=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{k+1} \bigcup_{i_l(m)=0}^{n_l-1} ((i_1(1) + \ldots + i_1(n))\, q_1 + \ldots + (i_k(1) + \ldots + i_k(n))\, q_k + $$
$$+ (i_{k+1}(1) + \ldots + i_{k+1}(n))\, q_{k+1} + nI_{k+1})\,.$$

Die Menge

$$\{(i_{k+1}(1) + \ldots + i_{k+1}(n))\, q_{k+1} : i_{k+1}(m) = 1, 2, \ldots, n_{k+1};\; m = 1, 2, \ldots, n\}$$

besteht aus $n(n_{k+1} - 1) + 1$ äquidistanten Elementen (Abstand: q_{k+1}). Insgesamt erhält man:

$C_n(k + 1) \subset C_n(k)$;

jedes Intervall von $C_n(k)$ enthält genau $n(n_{k+1} - 1) + 1$ Intervalle von $C_n(k + 1)$, wobei benachbarte Intervalle den Abstand $a_{k+1,n} = q_{k+1} - nl_{k+1} = a_{k+1} - (n - 1)\, l_{k+1}$ besitzen.

Bemerkung. Nach Satz 2(a) folgt $\liminf_{k\to\infty} l_k/a_k = 0$ aus $L(C^*) = 0$. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie DÜRR in einer noch unveröffentlichten Arbeit zeigt. Folgende Frage, ob Satz 2(b) verschärft werden kann, ist vermutlich positiv zu beantworten.

Frage. Folgt $L(C^K) = 0$ aus $l_k/a_k \to 0$?

4. Gruppen mit vorgegebener Dimension. Ist $\lim_{k\to\infty} l_k/a_k = 0$ und n eine natürliche Zahl, so liefert Hilfssatz 3 näherungsweise für große k die Anzahl der Intervalle von C_n. Damit sind Dimensionsberechnungen von C_n und C möglich. Beispielsweise lassen sich auf diese Weise leicht perfekt erzeugte Gruppen mit vorgegebener Hausdorff-Dimension angeben. Zu beliebige $\alpha \in (0, 1)$ haben erstmals ERDÖS und VOLKMANN [2] reelle additive Gruppen G_α mit $\dim G_\alpha = \alpha$ konstruiert.

Satz 3. *Sei* $\alpha \in (0, 1)$, $\lim_{k\to\infty} 1/n_k = \lim_{k\to\infty} k/\log N_k = 0$, $0 < \liminf_{k\to\infty} N_k l_k^\alpha$ *und* $\limsup_{k\to\infty} N_k l_k^\alpha < \infty$. *Dann gilt*

$$\dim C = \dim C^* = \alpha\,, \tag{c}$$

$$\lim_{k\to\infty} (\log n_k)/\log N_{k-1} = 0 \Rightarrow \dim_m C^* = \alpha\,. \tag{d}$$

Beweis von (c). Es gibt eine natürliche Zahl s, so daß für alle $k \geqq s$ die Abschätzungen

$$1/s < N_k l_k^\alpha < s$$

bestehen. Ferner gilt

$$\frac{a_{k+1}}{l_{k+1}} = \frac{l_k - n_{k+1} l_{k+1}}{(n_{k+1} - 1)\, l_{k+1}} \leqq \frac{(s/N_k)^{1/\alpha}}{(n_{k+1} - 1)\,(1/sN_{k+1})^{1/\alpha}} - \frac{n_{k+1}}{n_{k+1} - 1} =$$

$$= \frac{n_{k+1}^{1/\alpha}}{n_{k+1} - 1}\, s^{2/\alpha} - \frac{n_{k+1}}{n_{k+1} - 1}$$

und damit

$$\lim_{k \to \infty} l_k / a_k = 0 .$$

Sei n fest gewählt. O.B.d.A.kann man $2nl_k < a_k$ für alle k voraussetzen. Damit ist C_n nach Hilfssatz 3 eine Cantormenge, und es gilt nach einem Satz von EGGLESTON (s. [4], Hilfssatz 5)

$$\dim C_n = \liminf_{k \to \infty} \frac{\log N_{k,n}}{- \log n l_k}$$

und

$$\dim C = \liminf_{k \to \infty} \frac{\log N_k}{- \log l_k} = \alpha .$$

Wegen $N_{k,n} \leqq n^k N_k$ und $\lim\limits_{k \to \infty} (k/\log N_k) = 0$ ist

$$\dim C_n \leqq \liminf_{k \to \infty} \alpha \cdot \frac{\log n^k N_k}{\log N_k} = \alpha .$$

Aus

$$\alpha = \dim C \leqq \dim C_{n,\infty} , \quad \dim C_{n,\infty} = \dim C_n$$

und

$$\dim C^* = \sup \{\dim C_{n,\infty} : n = 1, 2, \ldots\}$$

folgt

$$\dim C^* = \alpha .$$

Beweis von (d). Wegen $\dim_m C^* \geqq \dim C^*$ ist nach (c) nur noch $\dim_m C^* \leqq \alpha$ zu zeigen. Es gilt

$$\dim_m C_{n,\infty} = \dim_m C_n = \limsup_{k \to \infty} \frac{\log N_{k,n}}{- \log (l_{k,n} + a_{k,n})}$$

und

$$l_{k,n} + a_{k,n} = l_k + a_k = l_{k-1} - (n_k - 1)\, l_k \leqq (s/N_{k-1})^{1/\alpha} - (n_k - 1)\,(1/sN_k)^{1/\alpha} =$$

$$= N_{k-1}^{-1/\alpha} (s^{1/\alpha} - (n_k - 1)\,(sn_k)^{-1/\alpha}) .$$

Es gibt ein $m \in \mathbf{N}$, so daß für alle $k \geqq m$

$$l_{k,n} + a_{k,n} \leqq m N_{k-1}^{-1/\alpha}$$

ist. Also folgt

$$\dim_m C_{n,\infty} \leqq \limsup_{k\to\infty} \alpha \frac{\log n^k N_k}{\log N_{k-1}} \leqq$$

$$\leqq \alpha \left(\limsup_{k\to\infty} k \frac{\log n}{\log N_{k-1}} + \limsup_{k\to\infty} \frac{\log n_k}{\log N_{k-1}} + 1 \right) = \alpha$$

und

$$\dim_m C^* = \sup \{\dim_m C_{n,\infty} : n = 1, 2, \ldots\} \leqq \alpha .$$

Folgerung. *Setzt man in Satz 3 speziell $n_k = k + 1$, so ergibt sich*

$$\dim C = \dim C^* = \dim_m C^* = \alpha .$$

5. Addition zweier Cantormengen. Ist C die klassische Cantormenge, so gilt

$$C + C = \bigcap_{k=1}^{\infty} (C(k) + C(k)) = [0, 2] .$$

Das kann bekanntlich wie folgt bewiesen werden. Sei $s \in [0, 2]$. Dann trifft die Gerade $y = s - x$ mindestens eines der vier Teilquadrate von $C(1) \times C(1)$. Wird dieses Q_1 genannt, so folgt, daß die Gerade ein Teilquadrat Q_2 von $(C(2) \times C(2)) \cap \cap Q_1$ trifft, usw. Setzt man $(x, y) = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$, so folgt $x + y = s$ und damit die Behauptung. Dieses Beweisschema wird bei dem folgenden Satz angewandt.

Satz 4. *Zu jeder Cantormenge C gibt es eine Cantormenge B mit $L(B) = 0$ und $B + C \supset [0, 1]$.*

Beweis. O.B.d.A. ist C eine Teilmenge von $[0, 1]$ und $0, 1 \in C$. Jedes Intervall k-ter Stufe von C besitze die Länge l_k. Wir wählen eine Teilfolge (m_k) der natürlichen Zahlen, so daß

(6) $$101_{m_{k+1}} < l_{m_k} \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad \text{und} \quad 101_{m_1} < 1$$

ist. Die Menge $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B(k)$ soll durch die Folgen $(N_k = n_1 n_2 \ldots n_k)$, (d_k) and (a_k) charakterisiert werden. Es soll wieder $B \subset [0, 1]$ und $0, 1 \in B$ sein. Die Menge $B(k)$ bestehe also aus N_k Intervallen der Länge $d_k = l_{m_k}$. Es sei n_k die kleinste natürliche Zahl, für die

(7) $$d_{k-1} \leqq 2 n_k d_k - d_k$$

ist. Dann gilt

$$2(n_k - 1) d_k - d_k < d_{k-1} .$$

Sei a_k definiert durch

$$n_k d_k + (n_k - 1)\, a_k = d_{k-1}\,.$$

Dann ist $a_k \leqq d_k$. Außerdem gilt

$$a_k > \frac{2(n_k - 1)\, d_k - d_k - n_k d_k}{n_k - 1} = \frac{d_k(n_k - 3)}{n_k - 1}\,.$$

Nach (6) und (7) ist $n_k > 5$ und folglich $a_k > d_k/2$. Daraus ergibt sich leicht $L(B) = 0$. Ferner ist

$$B + C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(B(k) + C(m_k)\right).$$

Sei $s \in [0, 1]$. Da $d_1 = l_{m_1}$ und $a_1 \leqq d_1$ ist, ergibt sich, daß die Gerade $y = s - x$ mindestens ein Quadrat Q_1 von $B(1) \times C(m_1)$ trifft, usw. Nach dem oben skizzierten Beweisschema erhält man $s \in B + C$.

Korollar. *Zu jeder L-meßbaren Menge X mit $L(X) > 0$ gibt es eine Cantormenge C mit $L(C) = 0$ und $X + C \supset [0, 1]$.*

Das folgt aus Satz 4 und einem Eergebnis von Sodnomov [5], der zeigte, daß jede derartige Menge X eine Cantormenge ($n_k = 3$ für alle k) enthält. Folgende Verschärfung des Korollars ist zu vermuten:

Zu jeder L-meßbaren Menge X mit $L(X) > 0$ und zu jeder Hausdorff-Funktion h gibt es eine Cantormenge C mit $L_h(C) = 0$ und $X + C \supset [0, 1]$.

Literatur

[1] *J. Benedetto:* Harmonic analysis on totally disconnected sets. Lecture Notes in Mathematics, Band 202. Berlin - Heidelberg - New York. Springer Verlag 1971.

[2] *P. Erdös, B. Volkmann:* Additive Gruppen mit vorgegebener Hausdorffscher Dimension. Journ. reine angew. Math. *221* (1966), 203—208.

[3] *J. P. Kahane, R. Salem:* Ensembles parfaits et séries trigonometriques. Paris. Herrmann 1963.

[4] *D. Kahnert:* Hausdorff-Maße von Summenmengen. Journ. reine angew. Math. *264* (1973), 1—28, *266* (1974), 1—9.

[5] *B. Sodnomov:* On a property of sets of positive measure. Fund. Math. *60* (1967), 187—190.

[6] *M. Souslin:* Sur un corps non dénombrable de nombres réels. Fund. Math. *4* (1922), 311—315.

[7] *H. Steinhaus:* Sur les distances des points des ensembles de mesure positive. Fund. Math. *1* (1920), 93—104.

[8] *H. Wegmann:* Die Hausdorff-Dimension von kartesischen Produkten metrischer Räume. Journ. reine angew. Math. *246* (1971), 46—75.

Anschrift des Verfassers: Universität Stuttgart, 7000 Stuttgart 1, Herdweg 21, BRD.