

G. Ja. Rotkovič

О σ -полных решеточно упорядоченных группах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 2, 279–281

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101318>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1975

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О σ -ПОЛНЫХ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

Г. Я. РОТКОВИЧ, Ленинград

(Поступило в редакцию 25/1 1974 г.)

1. Введение. Для сингулярной l -группы X , как показал Я. Якубик ([7], теорема 2.12.), равносильны следующие условия:

- (I) X является полной;
- (II) X является σ -полной и дизъюнктно полной.

Там же был поставлен вопрос: переносится ли этот результат на произвольные l -группы? В заметке дается на этот вопрос положительный ответ. Именно имеет место.

Основная теорема. Пусть X есть l -группа. Тогда для нее равносильны условия (I) и (II).

2. Основные определения и понятия. Будем использовать, в основном, терминологию и обозначения из [3] и [6]. Те понятия, которые не разъяснены здесь, имеют одинаковый смысл для l -групп и для векторных решеток и их можно найти в книге [3].

Группа X называется l -группой (решеточно упорядоченной группой), если она является одновременно решеткой, в которой на $x > y$ следует $x + z > y + z$ для любого $z \in X$.

Хорошо известно, что всякая σ -полная l -группа является архимедовой, следовательно, абелевой (см., например, [1], гл. XIV), что оправдывает применяемую здесь аддитивную запись групповой операции.

В l -группе X элемент x называется полулинейным, если для всякого $y \in X$, $0 < y \leq |x|$ существует $z \in X$ такой, что $0 < 2z \leq y$. Если всегда можно подобрать z так, чтобы выполнялось точное равенство, то x называется линейным. Элемент $0 < x \in X$ называется неделимым, если не существует $y \in X$ такого, что $0 < 2y \leq x$. Элемент $x \in X$, дизъюнктивный всем полулинейным элементам, называется d -элементом. Если l -группа не содержит полулинейных элементов (т.е. состоит из d -элементов), то она называется сингулярной.

Хорошо известно (см. [6]), что неделимый элемент является d -элементом, что совокупности полулинейных X' и d -элементов X'' являются дизъюнктными компонентами в X , что их соединение (прямое произведение) является фундаментом (плотным идеалом) в X .

В l -группе X элемент x называется *приводимым*, если его можно представить в виде $x = x' + x''$, где $x' \in X'$, $x'' \in X''$. В противном случае x называется *неприводимым*. Считается, что 0 одновременно и приводим и неприводим.

Если в l -группе любое ограниченное множество попарно дизъюнктных элементов имеет супремум и инфимум, то она называется *дизъюнктно полной*.

3. Теорема 1. *Если архимедова l -группа X дизъюнктно полна, то в ней нет неприводимых элементов.*

Доказательство. Поскольку неприводимость x равносильна неприводимости $|x|$, то достаточно ограничиться рассмотрением положительных элементов.

Пусть элемент $0 < x \in X$ не является ни полулинейным, ни d -элементом. Тогда в X существует неделимый элемент $u < x$. Выберем (используя лемму Цорна) полную дизъюнктную систему $\{y_\alpha\}$ таких элементов. В силу дизъюнктной полноты существует неделимый $y = \sup \{y_\alpha\} \in X$.

По построению $(ny - x)_+$ при любом $n \in \mathbb{N}$ является d -элементом (N означает натуральный ряд). Поскольку в силу теоремы 2.11. из [7] X'' есть полная l -группа, в ней существуют проекции. Пусть

$$y_n = (((n + 1) y - x)_+) y - ((ny - x)_+) y.$$

Совокупность $\{y_n\}$ образует полную дизъюнктную систему в X_y . Легко видеть, что $x_n = x \wedge (n + 1) y_n$ является проекцией x на X_{y_n} . В силу дизъюнктной полноты существует $x'' = \sup \{x_n\} \in X$. Далее, $x'' = (y) x$, т. е. x не является неприводимым, что и доказывает теорему.

Лемма 2. *Если σ -полная l -группа X дизъюнктно полна, то в ней всякий полулинейный элемент является линейным.*

Доказательство. Поскольку полулинейность x равносильна полулинейности $|x|$, достаточно ограничиться рассмотрением положительных элементов. Поскольку будет рассматриваться только компонента, порожденная полулинейным x , можно считать, что X совпадает с этой компонентой.

В силу полулинейности $0 < x \in X$ для любого $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать (используя лемму Цорна) в X полную дизъюнктную систему $\{x_{n\alpha}\}$ такую, что $x > 2^n \cdot x_{n\alpha}$ для любого элемента из нее. Тогда и для принадлежащего X в силу дизъюнктной полноты $x_n = \sup \{x_{n\alpha}\}$ имеет место $x > 2^n \cdot x_n$. Кроме того $X = X_x = X_{x_n}$.

В силу теоремы 8 из [6] x и x_n рациональнозначны относительно друг друга, т. е. X представляется в виде соединения компонент, порожденных элементами x_{nk} , $k = 0, 1, 2, \dots$, причем x_{nk} суть проекции x_n на эти компоненты, x_{n0} есть линейный элемент, $(x_{nk})x = r_{nk} \cdot x_{nk}$, $k = 1, 2, \dots$, где r_{nk} суть рациональные числа. Пусть $x_0 = \sup_n \{x_{n0}\}$. Поскольку существуют проекции x и x_n на компоненту, дизъюнктную x_0 , то можно сразу считать, что $x_0 = 0$. Поскольку X есть σ -полная l -группа, то существует

$$y_n = \sup \{l_{nk} \cdot x_{nk} : l_{nk} \in N, 2^m \cdot l_{nk} \cdot x_{nk} < x\} \in X.$$

Легко видеть, что $y_m = x/2^m$. Следовательно, x является линейным, что и доказывает лемму.

Лемма 3. *Дизъюнктно полная σ -полная l -группа X , состоящая из полулинейных элементов, является K -пространством.*

Доказательство. Из теоремы 7 в [6] и леммы 2 следует, что X является K_σ -пространством. Тогда в силу теорем 3 и 4 из [2] она является и K -пространством.

4. Доказательство основной теоремы. В доказательстве нуждается только импликация (II) \Rightarrow (I). В силу теоремы I в X нет неприводимых элементов, следовательно, X есть соединение (прямое произведение) компонент X' и X'' полулинейных и d -элементов, соответственно. Для X' импликация доказана в лемме 3. Для X'' равносильность (I) и (II) доказана в [7], теорема 2.12. Итак, X есть соединение K -пространства X' и полной l -группы, состоящей из d -элементов, что и доказывает теорему.

Примечание. Как любезно сообщил автору профессор Якубик, он доказал равносильность (I) и (II) независимо и другим способом.

Литература

- [1] Г. Биркгоф: Теория структур. ИЛ, 1952.
- [2] А. И. Векслер, В. А. Гейлер: О порядковой и дизъюнктной полноте полуупорядоченных пространств. Сибирск. матем. журн. 1972, 13, № 1, 43—51.
- [3] Б. З. Вулих: Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, 1961.
- [4] P. Conrad: The lateral completion of a lattice ordered group. Proc. London Math. Soc., 1969, 19, 404—480.
- [5] P. Conrad, D. McAllister: The completion of a lattice ordered group. J. Austral. Math. Soc., 1969, 9, 182—208.
- [6] Г. Я. Роткович: О полуупорядоченных группах. Уч. зап. Лен. педаг. ин-та, 1971, 404, 439—451.
- [7] J. Jakubik: On σ -complete lattice ordered groups. Czechoslovak Math. J. 1973, 23, 164—174.

Адрес автора: СССР, 194017, Ленинград, Дрезденская ул., дом 26, кв. 27.