Czechoslovak Mathematical Journal

G. Ja. Rotkovič

О σ-полных решеточно упорядоченных группах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 2, 279–281

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101318

Czechoslovak Mathematical Journal, 25 (100) 1975, Praha

О σ-ПОЛНЫХ РЕШЕТОЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

Г. Я. РОТКОВИЧ, Ленинград

(Поступило в редакцию 25/I 1974 г.)

1. Введение. Для сингулярной l-группы X, как показал Я. Якубик ([7], теорема 2.12.), равносильны следующие условия:

(I) *X является полной;*

(II) *X является σ-полной и дизъюнктно полной.*

Там же был поставлен вопрос: переносится ли этот результат на произвольные l-группы? В заметке дается на этот вопрос положительный ответ. Именно имеет место.

Основная теорема. *Пусть X есть l-группа. Тогда для нее равносильны условия* (I) *и* (II).

2. Основные определения и понятия. Будем использовать, в основном, терминологию и обозначения из [3] и [6]. Те понятия, которые не разъяснены здесь, имеют одинаковый смысл для l-групп и для векторных рещеток и их можно найти в книге [3].

Группа X называется *l-группой* (*решеточно упорядоченной группой*), если она является одновременно решеткой, в которой на $x > y$ следует $x + z > y + z$ для любого $z \in X$.

Хорошо известно, что всякая σ-полная l-группа является архимедовой, следовательно, абелевой (см., например, [I], гл. XIV), что оправдывает применяемую здесь аддитивную запись групповой операции.

В l-группе X элемент x называется полулинейным, если для всякого $y \in X$, $\mathbf{0} < y \leqq |x|$ существует $z \in X$ такой, что $\mathbf{0} < 2z \leqq y$. Если всегда можно подобрать z так, чтобы выполнялось точное равенство, то x называется линейным. Элемент $\mathbf{0} < x \in X$ называется неделимым, если не существует $y \in X$ такого, что $\mathbf{0} < 2y \leqq x$. Элемент $x \in X$, дизъюнктный всем полулинейным элементам, называется *d-элементом*. Если l-группа не содержит полулинейных элементов (т.е. состоит из d-элементов), то она называется *сингулярной*.

Хорошо известно (см. [6]), что неделимый элемент является d-элементом, что совокупности полулинейных X' и d-элементов X'' являются дизъюнктными компонентами в X, что их соединение (прямое произведение) является фундаментом (плотным идеалом) в X.

В l-группе X элемент x называется *приводимым*, если его можно представить в виде $x = x' + x''$, где $x' \in X'$, $x'' \in X''$. В противном случае x называется *неприводимым*. Считается, что $\mathbf{0}$ одновременно и приводим и неприводим.

Если в l-группе любое ограниченное множество попарно дизъюнктных элементов имеет супремум и инфимум, то она называется *дизъюнктно полной*.

3. Теорема 1. *Если архимедова l-группа X дизъюнктно полна, то в ней нет неприводимых элементов.*

Доказательство. Поскольку неприводимость x равносильна неприводимости $|x|$, то достаточно ограничиться рассмотрением положительных элементов.

Пусть элемент $\mathbf{0} < x \in X$ не является ни полулинейным, ни d-элементом. Тогда в X существует неделимый элемент $u < x$. Выберем (используя лемму Цорна) полную дизъюнктную систему $\{y_\alpha\}$ таких элементов. В силу дизъюнктной полноты существует неделимый $y = \sup\{y_\alpha\} \in X$.

По построению $(ny - x)_+$ при любом $n \in \boldsymbol{N}$ является d-элементом ($\boldsymbol{N}$ означает натуральный ряд). Поскольку в силу теоремы 2.11. из [7] X'' есть полная l-группа, в ней существуют проекции. Пусть

$$y_n = (((n + 1)\, y - x)_+)\, y - ((ny - x)_+)\, y\,.$$

Совокупность $\{y_n\}$ образует полную дизъюнктную систему в X_y. Легко видеть, что $x_n = x \wedge (n + 1)\, y_n$ является проекцией x на X_{y_n}. В силу дизъюнктной полноты существует $x'' = \sup\{x_n\} \in X$. Далее, $x'' = (y)\, x$, т. е. x не является неприводимым, что и доказывает теорему.

Лемма 2. *Если σ-полная l-группа X дизъюнктно полна, то в ней всякий полулинейный элемент является линейным.*

Доказательство. Поскольку полулинейность x равносильна полулинейности $|x|$, достаточно ограничиться рассмотрением положительных элементов. Поскольку будет рассматриваться только компонента, порожденная полулинейным x, можно считать, что X совпадает с этой компонентой.

В силу полулинейности $\mathbf{0} < x \in X$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$ можно выбрать (используя лемму Цорна) в X полную дизъюнктную систему $\{x_{n\alpha}\}$ такую, что $x > 2^n \,.\, x_{n\alpha}$ для любого элемента из нее. Тогда и для принадлежащего X в силу дизъюнктной полноты $x_n = \sup\limits_{\alpha}\{x_{n\alpha}\}$ имеет место $x > 2^n \,.\, x_n$. Кроме того $X = X_x = X_{x_n}$.

В силу теоремы 8 из [6] x и x_n рациональнозначны относительно друг друга, т. е. X представляется в виде соединения компонент, порожденных элементами x_{nk}, $k = 0, 1, 2, \ldots$, причем x_{nk} суть проекции x_n на эти компоненты, x_{n0} есть линейный элемент, $(x_{nk})\, x = r_{nk} \,.\, x_{nk}$, $k = 1, 2, \ldots$, где r_{nk} суть рациональные числа. Пусть $x_0 = \sup\limits_n \{x_{n0}\}$. Поскольку существуют проекции x и x_n на компоненту, дизъюнктную x_0, то можно сразу считать, что $x_0 = \mathbf{0}$. Поскольку X есть σ-полная l-группа, то существует

$$y_n = \sup \{l_{nk} \,.\, x_{nk} : l_{nk} \in N,\ 2^m \,.\, l_{nk} \,.\, x_{nk} < x\} \in X \,.$$

Легко видеть, что $y_m = x/2^m$. Следовательно, x является линейным, что и доказывает лемму.

Лемма 3. *Дизъюнктно полная σ-полная l-группа X, состоящая из полулинейных элементов, является K-пространством.*

Доказательство. Из теоремы 7 в [6] и леммы 2 следует, что X является K_σ-пространством. Тогда в силу теорем 3 и 4 из [2] она является и K-пространством.

4. Доказательство основной теоремы. В доказательстве нуждается только импликация (II) $\Rightarrow$ (I). В силу теоремы I в X нет неприводимых элементов, следовательно, X есть соединение (прямое произведение) компонент X' и X'' полулинейных и d-элементов, соответственно. Для X' импликация доказана в лемме 3. Для X'' равносильность (I) и (II) доказана в [7], теорема 2.12. Итак, X есть соединение K-пространства X' и полной l-группы, состоящей из d-элементов, что и доказывает теорему.

Примечание. Как любезно сообщил автору профессор Якубик, он доказал равносильность (I) и (II) независимо и другим способом.

Литература

[1] *Г. Биркгоф:* Теория структур. ИЛ, 1952.

[2] *А. И. Векслер, В. А. Гейлер:* О порядковой и дизъюнктной полноте полуупорядоченных пространств. Сибирск. матем. журн. 1972, 13, № 1, 43—51.

[3] *Б. З. Вулих:* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, 1961.

[4] *P. Conrad:* The lateral completion of a lattice ordered group. Proc. London Math. Soc., 1969, *19*, 404—480.

[5] *P. Conrad, D. McAllister:* The completion of a lattice ordered group.J. Austral. Math. Soc., 1969, *9*, 182—208.

[6] *Г. Я. Роткович:* О полуупорядоченных группах. Уч. зап. Лен. педаг. ин-та, 1971, *404*, 439—451.

[7] *J. Jakubík:* On σ-complete lattice ordered groups. Czechoslovak Math. J. 1973, *23*, 164—174.

Адрес автора: СССР, 194017, Ленинград, Дрезденская ул., дом 26, кв. 27.