

A. B. Kurovskii; Jurij Michailov Smirnov

О размерности ird , определенной с помощью ретракций

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 26 (1976), No. 1, 30–36

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101370>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1976

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О РАЗМЕРНОСТИ Ird , ОПРЕДЕЛЕННОЙ С ПОМОЩЬЮ РЕТРАКЦИЙ

А. Б. КУРОВСКИЙ, Ю. М. СМИРНОВ, Москва

(Поступило в редакцию 12/ХІІ 1973 г.)

Фактически усиливается следующим образом одна теорема Б. Т. Левшенко [1]: *если в метрическом пространстве X для всякого непустого замкнутого множества A существует такое конечномерное¹⁾ замкнутое в $X \setminus A$ множество B , что A является ретрактом дополнения $X \setminus B$. то X — конечномерно и тогда $\dim X \leq n$ в том и только в том случае, когда для всякого непустого замкнутого в X множества A найдется такое замкнутое в $X \setminus A$ множество B размерности $\dim B \leq n - 1$, что A является ретрактом дополнения $X - B$.*

Вторая часть этого утверждения и есть теорема Левшенко.

Доказательство проходит не только для размерности $\dim X = \text{Ind } X$ ¹⁾, но и для так называемой *размерности $\text{Ind}_M X$ по модулю M* , введенной А. Лелеком [2] и скрупулезно изученной Й. Аартсом [3]. В связи с этим вводится и изучается *ретракционная размерность $\text{Ird}_M X$ по модулю M* , определение которой следующее:

Определение 1. Пусть M — класс пространств²⁾; $\text{Ird}_M X = -1$ тогда и только тогда, когда $X \in M$; считая, что неравенства $\text{Ird}_M X \leq \alpha$ определены для всех порядковых чисел $\alpha < \beta$, полагаем, что $\text{Ird}_M X \leq \beta$ тогда и только тогда, когда для всякого непустого замкнутого в X множества A существует такое замкнутое в $X \setminus A$ множество B размерности $\text{Ird}_M B \leq \alpha < \beta$, что A является ретрактом дополнения $X \setminus B$.

Аналогично определяется индуктивная размерность $\text{Ind}_M X$:

Определение 2 (А. Лелек [2]). $\text{Ind}_M X = -1$ тогда и только тогда, когда $X \in M$; считая, что неравенства $\text{Ind}_M X \leq \alpha$ определены для всех $\alpha < \beta$, пола-

¹⁾ В смысле размерности $\dim X$ или, что то же самое [4], в рассматриваемом случае метрических пространств, в смысле размерности $\text{Ind } X$.

²⁾ Ради краткости пространствами будем называть топологические пространства, отображениями — непрерывные отображения, ретракциями — непрерывные ретракции, и окрестностями — открытые окрестности.

гаем, что $\text{Ind}_M X \leq \beta$ тогда и только тогда, когда любые два замкнутых непересекающихся множества A и B пространства X можно разбить перегородкой³⁾ C размерности $\text{Ind}_M C \leq \alpha < \beta$.

Лемма 1. Если $L \subset M$, то $\text{Ird}_M X \leq \text{Ird}_L X$ ⁴⁾ для любого X .

В самом деле, легко показать по индукции, что если $\text{Ird}_L X \leq \alpha$, то и $\text{Ird}_M X \leq \alpha$, откуда лемма следует очевидным образом.

Лемма 1' (А. Лелек [2]). Если $L \subset M$, то $\text{Ind}_M X \leq \text{Ind}_L X$ для любого X .

Доказательство — аналогичное.

Назовём класс M пространств *монотонным по замкнутым множествам* (Й. Аартс), если он вместе со всяким пространством X содержит и любое его замкнутое множество. Назовём функцию fX , заданную на некотором классе пространств, со значениями в упорядоченном множестве *монотонной по замкнутым множествам* (Й. Аартс), если $fA \leq fX$ для всякого пространства X и всякого его замкнутого множества A .

Лемма 2. Если класс M монотонен по замкнутым множествам, то и размерность $\text{Ird}_M X$ монотонна по замкнутым множествам.

Действительно, легко показать по индукции, что если $\text{Ird}_M X \leq \alpha$, то и $\text{Ird}_M A \leq \alpha$ для любого замкнутого в X множества A , откуда непосредственно вытекает лемма.

Лемма 2' (Й. Аартс [3]). В предположении леммы 2 размерность $\text{Ind}_M X$ монотонна по замкнутым множествам.

Доказательство — аналогичное.

Лемма 3. В предположении леммы 2 $\text{Ind}_M X \leq \text{Ird}_M X$ для всякого нормального пространства X .

Доказательство. Покажем по индукции, что если $\text{Ird}_M X \leq \beta$, то и $\text{Ind}_M X \leq \beta$. Пусть $\text{Ird}_M X \leq \beta$, а A и B — замкнутые в X непересекающиеся множества⁵⁾. Существует замкнутое в $X \setminus A \setminus B$ множество C размерности $\text{Ird}_M C \leq \alpha < \beta$ и ретракция $r : X \setminus C \rightarrow A \cup B$. Множества $r^{-1}A$ и $r^{-1}B$ не

³⁾ Говорят, что „перегородка C разбивает X между A и B “, если C является дополнением к объединению $U \cup V$ непересекающихся окрестностей U и V множеств A и, соотв., B . Определение 2 эквивалентно определению, данному Лелеком.

⁴⁾ Здесь и всюду далее всякое неравенство такого рода будем понимать так: если существует $\text{Ird}_L X$, то существует $\text{Ird}_M X$ $\text{Ird}_M X \leq \text{Ird}_L X$.

⁵⁾ Тогда $M \neq \emptyset$. Если $A = B = \emptyset$, то искомой перегородкой будет \emptyset , необходимо принадлежащее к классу M . Поэтому можно предполагать, что $A \cup B \neq \emptyset$.

пересекаются, открыты в $X \setminus C$ и $r^{-1}A \cup r^{-1}B = X \setminus C$. Так как r – непрерывно, то $A \cap \overline{r^{-1}B} = \emptyset$ и $B \cap \overline{r^{-1}A} = \emptyset$. Из предположения о нормальности пространства X следует, что существуют такие окрестности G и H множества A и, соотв., B , что

$$G \cap H = \emptyset, \quad G \cap \overline{r^{-1}B} = \emptyset, \quad H \cap \overline{r^{-1}A} = \emptyset.$$

Множества $U = G \cup r^{-1}A$ и $V = H \cup r^{-1}B$ являются непересекающимися окрестностями множеств A и, соотв., B . Искомой перегородкой между A и B будет множество $D = X \setminus U \setminus V$, так как $D \subset X \setminus r^{-1}A \setminus r^{-1}B = C$ и, являясь замкнутым множеством в C , имеет по индукционному предположению размерность $\text{Ind}_M D \leq \text{Ird}_M D \leq \text{Ird}_M C \leq \alpha < \beta$. Так как замкнутые непересекающиеся множества A и B были выбраны в X произвольно, то это значит, что $\text{Ind}_M X \leq \beta$. Лемма доказана.

Лемма 4. *В предположении леммы 2 никакое пространство X , представимое в виде $X = \overline{UX_k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где слагаемые X_k попарно не пересекаются, открыты и замкнуты в X , а $\text{Ird}_M X_k \geq k$ ⁶⁾ для каждого k , не имеет размерности Ird_M .*

Доказательство. Среди этих пространств X , представимых в указанном выше виде, и, предположительно, имеющих размерность $\text{Ird}_M X$, возьмем пространство X наименьшей возможной размерности $\text{Ird}_M X = \beta$. Приведем это к противоречию. Пусть $X = \overline{UX_k}$, где $\text{Ird}_M X_k \geq k$. Тогда для каждого k существует такое замкнутое в X_k множество A_k , что если для замкнутого в $X_k \setminus A_k$ множества B_k имеется ретракция $r_k : X_k \setminus B_k \rightarrow A_k$, то $\text{Ird}_M B_k \geq k - 1$. Пусть $a_k \in A_k$ для каждого k . Так как $A = \overline{UA_k}$ – замкнуто в X , а $\text{Ird}_M X = \beta$, то существуют замкнутое в $X \setminus A$ множество B размерности $\text{Ird}_M B = \alpha < \beta$ и ретракция $r : X \setminus B \rightarrow A$. Определим теперь для каждого k отображение $r_k : X_k \setminus B \rightarrow A_k$ формулами:

$$r_k(x) = r(x), \quad \text{если } r(x) \in A_k, \quad r_k(x) = a_k, \quad \text{если } r(x) \notin A_k.$$

Для каждого множества $\Phi \subset A_k \setminus a_k$ полный прообраз $r_k^{-1}\Phi = X_k \cap r^{-1}\Phi$. Если же $a_k \in \Phi \subset A_k$, то полный прообраз $r_k^{-1}\Phi = X_k \cap r^{-1}((A \setminus X_k) \cup \Phi)$. Значит, для любого замкнутого в A_k множества Φ полный прообраз $r_k^{-1}\Phi$ – замкнут в X_k . Поэтому каждое отображение r_k является ретракцией (непрерывной!) на A_k . Значит, в силу выбора множеств A_k размерность $\text{Ird}_M (X_k \cap B) \geq k - 1$, – ведь $X_k \cap B$ замкнуто в $X_k \setminus A_k = X_k \setminus A$.

⁶⁾ Мы пишем $\text{Ird}_M X \geq \alpha$ (и, соотв., $\text{Ind}_M X \geq \alpha$) и в том случае, когда X не имеет размерности Ird_M (соотв. Ind_M).

Пусть теперь $Y_k = X_{k+1} \cap B$ для каждого k и $Y = \overline{UY_k^B}$ ⁷⁾. По лемме 2 $\text{Ird}_M Y \leq \text{Ird}_M B \leq \alpha \leq \beta$. Так как каждое X_k открыто и замкнуто в X , то каждое $Y_k = X_{k+1} \cap B = X_{k+1} \cap Y$ открыто и замкнуто в Y . Кроме того мы уже показали, что $\text{Ird}_M Y_k = \text{Ird}_M (X_{k+1} \cap B) \geq k$ для каждого k . Этим получено противоречие с выбором числа β .

Несколько проще доказывается аналогичная

Лемма 4'. *В предположении леммы 2 никакое пространство X , представимое в виде $X = \overline{UX_k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где слагаемые X_k попарно не пересекаются, открыты и замкнуты в X , а $\text{Ird}_M X_k \geq k$ для каждого k , не имеет размерности Ird_M .*

Назовем, предварительно, систему множеств X_λ пространства X *сильно-звёздно-конечной*, если у каждого X_λ существует окрестность O_λ , пересекающаяся лишь с конечным числом множеств X_λ .

Следствие 1. *В предположении леммы 2 никакое пространство X , представимое в виде $X = \overline{UX_\lambda}$, где слагаемые X_λ — замкнуты в X , составляют сильно-звёздно-конечную систему, которая для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ содержит множества X_{λ_k} ($\lambda_k \neq \lambda_l$ при $k \neq l$) размерности $\text{Ird}_M X_{\lambda_k} \geq k$, не имеет размерности Ird_M .*

Доказательство. Достаточно показать, что в пространстве X , представленном указанным образом, можно найти замкнутое подпространство, представимое так, как указано в лемме 4. Пусть $Y_0 = X_0$, а O_0 — окрестность множества Y_0 , пересекающуюся с конечным числом множеств X_λ , что возможно так как система $\{X_\lambda\}$ — сильно-звёздно-конечна. Предположим теперь, что мы выбрали множества $Y_n = X_{\lambda_{k_n}}$ и их окрестности O_n для всех $n = 0, 1, 2, \dots, N$ таким образом, что каждая окрестность O_n пересекается лишь с конечным числом множеств X_λ и что $O_n \cap Y_{n'} = \emptyset$, если $0 \leq n < n' \leq N$. В силу выбора окрестностей O_n , $n \leq N$, существует такой номер k_{N+1} , что $X_{\lambda_{k_{N+1}}} \cap O_n = \emptyset$ для всех $n \leq N$. Пусть $Y_{N+1} = X_{\lambda_{k_{N+1}}}$, а O_{N+1} — некоторая окрестность множества Y_{N+1} , пересекающаяся лишь с конечным числом множеств X_λ . Действуя таким образом до бесконечности мы получим последовательность замкнутых множеств Y_n размерности $\text{Ird}_M Y_n \geq k_n \geq n$. Пусть $Y = \overline{UY_n}$. Каждое Y_n замкнуто в Y . Легко видеть, что множества Y_n попарно не пересекаются. Поэтому множество $O'_n = O_n \setminus Y_0 \setminus \dots \setminus Y_{n-1}$ является открытой окрестностью множества Y_n , не пересекающейся ни с одним из других множеств Y_n . Значит, $Y_n = Y \cap O'_n$, и следовательно, открыто в Y . Поэтому можно применить лемму 4 ко множеству Y и заключить с помощью леммы 2, что X не имеет размерности Ird_M .

⁷⁾ Через S^B мы обозначаем замыкание множества S во множестве B .

Точно также из леммы 4' получаем

Следствие 1'. В предположении леммы 2 никакое пространство X , представимое в виде $X = \overline{UX}_\lambda$, где слагаемые X_λ — замкнуты в X , составляют сильно-звездно-конечную систему, которая для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ содержит множества X_{λ_k} ($\lambda_k \neq \lambda_l$ при $k \neq l$) размерности $\text{Ind}_M X_{\lambda_k} \geq k$, не имеет размерности Ind_M .

Докажем теперь теорему Левшенко [1] для размерности Ind_M но при следующем дополнительном условии, налагаемом на класс M : назовём класс M локально-счетно-аддитивным, если он содержит всякое пространство X , имеющее локально-счетное покрытие из замкнутых множеств $\Phi_\lambda \in M$.

Теорема 1. Если класс M монотонен по замкнутым множествам и локально-счётно-аддитивен, то $\text{Ird}_M X = \text{Ind}_M X$ для всякого метрического пространства X , обладающего конечной размерностью $\text{Ind}_M X$.

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно показать, что в наших условиях $\text{Ird}_M X \leq \text{Ind}_M X$. Пусть $\text{Ind}_M X = n - 1$. Тогда $X \in M$ и $\text{Ird}_M X = n - 1$. Предположим теперь, что если $\text{Ind}_M X \leq n - 1$, то и $\text{Ird}_M X \leq n - 1$. Докажем, что заменив в этом утверждении n на $n + 1$, мы не нарушим его справедливости. Пусть $\text{Ind}_M X \leq n$, а A — произвольное непустое замкнутое множество в X . Применим конструкцию Левшенко [1]. Для каждого $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ существуют такие окрестности O_k множества A , что $\overline{O_{k+1}} \subset O_k$ и $\varrho(x, A) \leq 1/k$, если $x \in O_k$, и $\text{Ind}_M \dot{O}_k \leq n - 1$ ⁸⁾. Пусть еще $O_0 = X$, а $P_k = \overline{O}_k \setminus O_{k+1}$ для каждого k . Ясно, что $X \setminus A = \cup P_k$ и что множество $T = \cup P_k$ замкнуто в $X \setminus A$. По теореме Аартса о счётной сумме ([3], стр. 202–203) $\text{Ind}_M T \leq n - 1$. В силу леммы 2 $\text{Ind}_M P_k \leq n$ для каждого k . Отсюда легко вывести известными методами, что для каждого $k \geq 1$ существует такое локально-конечное покрытие $\{U_{k\alpha}\}$ множества P_k открытыми в нем множествами $U_{k\alpha}$, что $\text{Ind}_M (\overline{U_{k\alpha}} \setminus U_{k\alpha}) \leq n - 1$ для всех α и что $\text{diam } U_{k\alpha} \leq 1/k$ при любых k и α .

Пусть $\Phi = \bigcup_k \bigcup_\alpha (\overline{U_{k\alpha}} \setminus U_{k\alpha})$. Легко видеть, что Φ , а, значит, и множество $B = T \cup \Phi$ замкнуто в $X \setminus A$. По теореме Аартса о локально-конечной сумме ([3], стр. 203–204) $\text{Ind}_M \bigcup_\alpha (\overline{U_{k\alpha}} \setminus U_{k\alpha}) \leq n - 1$ для каждого k , а отсюда по теореме Аартса о счётной сумме имеем: $\text{Ind}_M B \leq n - 1$ ⁹⁾. Можно считать, что индексы α являются порядковыми числами. Построим по индукции множества $V_{k\alpha}$ с помощью формул:

$$V_{00} = X \setminus \overline{O}_1 \setminus B, \quad V_{k\beta} = U_{k\beta} \setminus B \setminus \bigcup_{\alpha < \beta} \overline{U_{k\alpha}}.$$

⁸⁾ Через \dot{O} обозначаем границу $\overline{O} \setminus O$ множества O в X .

⁹⁾ Легко видеть, что в наших предположениях условие счётно-локальной аддитивности эквивалентно условиям Аартса (счётной аддитивности и локально конечной аддитивности) взятым вместе.

Множества $V_{k\alpha}$ будут открыты в X , попарно не пересекаются и покрывают множество $X \setminus A \setminus B$. Ретракцию $r : X \setminus B \rightarrow A$ получаем так: берем в A такую систему точек $a_{k\alpha}$, что $V_{k\alpha} \neq \emptyset$ и $\rho(a_{k\alpha}, V_{k\alpha}) < 2/k$, и полагаем $r(x) = a_{k\alpha}$, если $x \in V_{k\alpha}$, и $r(x) = x$, если $x \in A$. По индукционному предположению $\text{Ird}_M B \leq n - 1$. Так как A было выбрано произвольно, то этим доказано, что $\text{Ird}_M X \leq n$, чем теорема Левшенко доказана и в наших предположениях.

Для второй теоремы нам понадобится вспомогательная

Лемма 5. *Если класс M монотонен по замкнутым множествам и счётно-аддитивен¹⁰⁾, то всякая точка x всякого метрического пространства X , имеющего размерность $\text{Ird}_M X$, обладает такой окрестностью O , что $\text{Ird}_M O$ — конечно.*

Доказательство. Если $M = \emptyset$, то пространств, имеющих размерность Ird_M , не существует, и — лемма верна. Пусть $M \neq \emptyset$. Тогда $\emptyset \in M$ и $\text{Ird}_M \emptyset = -1$. Тогда каждое одноточечное пространство X является ретрактом самого себя. Откуда следует, что $\text{Ird}_M X \leq 0$. С помощью этих утверждений покажем предварительно, что если точка x метрического пространства X не имеет замкнутых окрестностей конечной размерности Ird_M , то для каждой ее окрестности O и каждого числа $k \geq 1$ найдется такая окрестность O' , что $\bar{O}' \subset O$ и $\text{Ird}_M(\bar{O}' \setminus O') \geq k$. Для этого построим такую последовательность окрестностей O_n точки x , что $O_1 = O$, $\bar{O}_{n+1} \subset O_n$ и $\text{diam } O_n < 1/n$ для всех n . Тогда $\bar{O} = x \cup \bigcup P_n$, где $P_n = \bar{O} \setminus O_n$. Предположив, вопреки желаемому, что $\text{Ird}_M(\bar{O} \setminus O_n) \leq k - 1$ для всех n получим в силу леммы 3, теоремы 1 и теоремы Аартса о счётной сумме, что $\text{Ird}_M \bar{O} \leq k - 1$, вопреки условию. Предположим снова, что точка x метрического пространства X , обладающего размерностью $\text{Ird}_M X$, не имеет замкнутых окрестностей конечной размерности Ird_M . Тогда из только что доказанного следует, что для окрестности $O_0 = X$ найдется такая окрестность O_1 , что $\bar{O}_1 \subset O_0$ и $\text{Ird}_M(\bar{O}_0 \setminus O_1) \geq 1$. Для O_1 найдется по той же причине такая окрестность O_2 точки x , что $\bar{O}_2 \subset O_1$ и $\text{Ird}_M(\bar{O}_1 \setminus O_2) \geq 2$. Продолжая этот процесс мы получим последовательность окрестностей O_k точки x , удовлетворяющих условиям $\bar{O}_{k+1} \subset O_k$ и $\text{Ird}_M X_k \geq k$, для всех k , где $X_k = \bar{O}_{k-1} \setminus O_k$. Система замкнутых множеств X_k сильно-звездно-конечна. Поэтому согласно следствию леммы 4 замкнутое множество \overline{UX}_k не имеет размерности Ird_M . Но тогда и X согласно лемме 2 и вопреки нашему предположению не имеет размерности Ird_M . Лемма доказана.

Теорема 2. *Если в предположениях теоремы 1 метрическое пространство X обладает размерностью $\text{Ird}_M X$, то $\text{Ird}_M X = \text{Ind}_M X < \omega_0$.*

¹⁰⁾ Это значит, что M содержит всякое пространство X , обладающее счетным покрытием из замкнутых множеств $\Phi_k \in M$.

Доказательство. Согласно лемме 5 в этом случае каждая точка x имеет замкнутую окрестность \overline{Ox} конечной размерности $\text{Ird}_M \overline{Ox}$. Выберем эту окрестность так, чтобы её размерность $\text{Ird}_M \overline{Ox}$ была наименьшей из возможных. Если существует такое натуральное число N , что $\text{Ird}_M \overline{Ox} \leq N$ для всех x , то в покрытие из окрестностей Ox можно вписать замкнутое локально-конечное покрытие $\{\Phi\}$. По леммам 2 и 3 тогда $\text{Ind}_M \Phi \leq N$ для всех Φ , а по теореме Аартса о локально-конечной сумме и нашей теореме 1 получим, что $\text{Ird}_M X = \text{Ind}_M X \leq k$ что и требовалось доказать. Остается еще показать, что другого случая не может быть. Пусть всё же существует такая последовательность точек x_k , что $\text{Ird}_M \overline{Ox_k} \geq k$ при каждом k . Если последовательность x_k не имеет точек прикосновения, то множество всех точек x_k замкнуто и дискретно, т. е. расстояния $\rho(x_k, x_{k'}) \geq \delta_k > 0$ при всех k и $k' \neq k$. Возьмем тогда такие окрестности Ux_k , что $\overline{Ux_k} \subset Ox_k$ и $\text{diam } \overline{Ux_k} \leq \delta_k/3$. В силу наших предположений об окрестностях $\overline{Ox_k}$ размерности $\text{Ird}_M \overline{Ux_k} = \text{Ird}_M \overline{Ox_k} \geq k$. В силу леммы 4 множество $X' = \bigcup_k \overline{Ux_k}$ не имеет размерности Ird_M , так как окрестности $\overline{Ux_k}$ попарно не пересекаются и открыты в X' . Так как X' замкнуто в X , то по лемме 2 и X не имеет размерности Ird_M , вопреки предположению. Итак, остается случай, когда последовательность x_k имеет точку прикосновения. Пусть такой будет точка x . Тогда найдется такое число k , что $x_k \in Ox$ и $k > \text{Ird}_M \overline{Ox}$. Это снова противоречит выбору окрестности Ox_k , так как $\text{Ird}_M \overline{Ox_k} \geq k > \text{Ird}_M \overline{Ox}$ и $x_k \in Ox$. Этим все возможные случаи разобраны, чем теорема доказана.

Литература

- [1] Б. Т. Левченко: Размерность метрических пространств и ретракция, "Fund. Math.", 66, 1969, 1—5.
- [2] A. Lelek, Dimension and mappings of spaces with finite deficiency. "Coll. Math" v. 12, 1964, 221—227.
- [3] J. M. Aarts, Dimension modulo a class of spaces. "Nieuw Archief Wisk" v. 20, 1972, 191—215.
- [4] М. Каметов: О размерности метрических пространств. ДАН СССР, т. 79, 1951, 189—191.

Адрес авторов: СССР, Москва В-234, МГУ, Математическое отделение.