

Semeon A. Bogatyĭ; Jurij Michailov Smirnov

О расположении компактов в Гильбертовом пространстве

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 26 (1976), No. 1, 37–41,42

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101371>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1976

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О РАСПОЛОЖЕНИИ КОМПАКТОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. А. БОГАТЫЙ, Ю. М. СМИРНОВ, Москва

(Поступило в редакцию 12/XII 1973 г.)

1. В работе [4] К. Борсук ввел понятие расположения множества A в X (позиции множества A в X — $\text{Pos}(X, A)$) и доказал, что *плоские континуумы одинаково расположены в плоскости тогда и только тогда, когда их формы (шейпы) совпадают*. Уже в трехмерном пространстве аналогичная теорема неверна: Если L_1 является дугой в пространстве E^3 , содержащей множество Антуана, а L_2 — кусочно-линейной дугой в пространстве E^3 , то их расположения в пространстве E^3 различны, то есть $\text{Pos}(E^3, L_1) \neq \text{Pos}(E^3, L_2)$.

Тем не менее оказалось, что в гильбертовом пространстве формы произвольных компактов можно охарактеризовать их расположениями: *формы компактов X и Y , лежащих в гильбертовом пространстве l_2 , совпадают ($\text{Sh } X = \text{Sh } Y$) тогда и только тогда, когда совпадают их расположения в l_2 ($\text{Pos}(l_2, X) = \text{Pos}(l_2, Y)$)*.

Наше доказательство этого факта существенно опирается на недавние результаты Т. А. Чепмэна [5] о бесконечномерных многообразиях, моделированных над \mathcal{Q} .

2. Приведем некоторые определения теории форм, которые можно найти в [4] и которые нам в будущем потребуются. Пусть X является произвольным подмножеством пространства $M \in AR(\mathfrak{M})$ и пусть Y является произвольным подмножеством пространства $N \in AR(\mathfrak{M})$. Под W — *последовательностью из X в Y* (в M, N) мы понимаем систему, состоящую из множеств X, Y, M, N и последовательности отображений $f_k : M \rightarrow N, k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую следующему условию: *для всякого компакта $C \subset X$ найдется такой компакт $D \subset Y$, что для всякой окрестности U компакта D (в N) существует такая окрестность V компакта C (в M), что $f_k|_V \simeq f_{k+1}|_V$ в U почти для всех k* .

Эту W -последовательность мы будем обозначать через $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M, N}$. Ясно, что если X и Y являются компактными, то W -последовательности — это в точности фундаментальные последовательности [3]. Нетрудно проверить,

что система, состоящая из множеств X, X, M, M и последовательности отображений $i_k: M \rightarrow M, k = 1, 2, \dots$, является W -последовательностью из X в X (в M, M), которую мы будем обозначать через $i_{X,M}$.

Если $f = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ и $g = \{g_k, Y, Z\}_{N,P}$ являются W -последовательностями, то легко проверить, что $\{g_k \circ f_k, X, Z\}_{M,P}$ является W -последовательностью, которая обозначается через $g \circ f$ и называется композицией f и g .

Две W -последовательности $f = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ и $f' = \{f'_k, X, Y\}_{M,N}$ называются *гомотопными* (обозначение $f \simeq f'$), если для всякого компакта $C \subset X$ существует такой компакт $D \subset Y$, что для всякой окрестности U компакта D (в N) существует такая окрестность V компакта C (в M), что $f_k|_V \simeq f'_k|_V$ в U почти для всех k .

Говорят, что два компакта X и Y имеют *одинаковую форму* (обозначение $\text{Sh } X = \text{Sh } Y$), если существуют такие пространства $M, N \in AR(\mathfrak{M})$, содержащие X и Y соответственно, и W -последовательности $f = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ и $g = \{g_k, Y, X\}_{N,M}$, что $g \circ f \simeq i_{X,M}$ и $f \circ g \simeq i_{Y,N}$.

Пусть A — произвольное подмножество пространства X , а B — произвольное подмножество пространства Y . Говорят, что *расположения A в X и B в Y одинаковы* (обозначается $\text{Pos}(X, A) = \text{Pos}(Y, B)$), если существуют два пространства $M, N \in AR(\mathfrak{M})$, содержащие X и Y соответственно в виде замкнутых подмножеств, и существуют две такие последовательности отображений

$$f_k: M \rightarrow N \quad \text{и} \quad g_k: N \rightarrow M, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что

$$(1) \quad f' = \{f_k, A, B\}_{M,N}, \quad f'' = \{f_k, X \setminus A, Y \setminus B\}_{M,N}$$

$$(2) \quad g' = \{g_k, B, A\}_{N,M}, \quad g'' = \{g_k, Y \setminus B, X \setminus A\}_{N,M}$$

являются W -последовательностями и

$$(3) \quad g' \circ f' \simeq i_{A,M}, \quad g'' \circ f'' \simeq i_{(X \setminus A),M}$$

$$(4) \quad f' \circ g' \simeq i_{B,N}, \quad f'' \circ g'' \simeq i_{(Y \setminus B),N}.$$

Доказательства того, что введенные отношения являются отношениями эквивалентности на классе всех компактов (на классе пар пространств соответственно) можно найти в [4], где показано также, что введенные отношения не зависят от того, какие объемлющие $AR(\mathfrak{M})$ пространства M и N брались.

3. Пусть гильбертов кирпич Q представляется в виде $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$, где I_i — замкнутый интервал $[-1, 1]$, а s обозначает $\prod_{i=1}^{\infty} I_i^0$, где I_i^0 — открытый интервал $(-1, 1)$. Гильбертово пространство l_2 мы будем представлять в виде мно-

жества всех квадратично-суммируемых последовательностей действительных чисел с обычной нормой; т. е. $l_2 = \{\{x_i\} : x_i \text{ является действительным числом } \sum x_i^2 < \infty\}$ и $d(\{x_i\}, \{y_i\}) = (\sum (x_i - y_i)^2)^{1/2}$.

Теорема 1. *Если X и Y — компакты, лежащие в s , то X и Y имеют одинаковую форму (то есть $\text{Sh } X = \text{Sh } Y$) в том и только в том случае, когда они одинаково расположены в гильбертовом кирпиче (то есть $\text{Pos}(Q, X) = \text{Pos}(Q, Y)$).*

Доказательство. Если $\text{Pos}(Q, X) = \text{Pos}(Q, Y)$, то, как доказано в [4, теорема 7.3], $\text{Sh } X = \text{Sh } Y$, поэтому нам нужно доказать лишь обратное утверждение.

Пусть $\text{Sh } X = \text{Sh } Y$. Так как $X, Y \subset s$, то, по теореме Т. А. Чепмэна [5, теорема 2] множества $Q \setminus X$ и $Q \setminus Y$ гомеоморфны, то есть существует гомеоморфизм $f : Q \setminus X \rightarrow Q \setminus Y$. Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма из [5].

Лемма. *Если $X \subset s$, то найдется такая гомотопия $F : Q \times I \rightarrow Q$, что выполняются следующие свойства:*

- 1) $F_0 = \text{id}$;
- 2) для всякой окрестности U пространства X в Q существует такое число $t_1 \in (0, 1)$, что $F_t(U) \subset U$ для $0 \leq t \leq t_1$;
- 3) $F_t(Q) \cap X = \emptyset$ для $t \in (0, 1]$.

Через $F(X)$ мы обозначим множество гомотопий $F : Q \times I \rightarrow Q$, которые удовлетворяют условиям леммы.

Выберем некоторую гомотопию $F \in F(X)$ и для каждого $k > 0$ рассмотрим отображение $f_k = f \circ F_{1/k}$. Покажем, что как $f = \{f_k, X, Y\}_{Q, Q}$, так и $f' = \{f_k, Q \setminus X, Q \setminus Y\}_{Q, Q}$ являются W -последовательностями. Пусть $V \subset Q$ является окрестностью компакта Y в Q . Так как f является гомеоморфизмом, то $f^{-1}(Q \setminus V)$ является компактом и не пересекается с множеством X . Следовательно, $U = Q \setminus f^{-1}(Q \setminus V)$ является такой окрестностью компакта X в Q , что $f(U \cap (Q \setminus X)) \subset V$. Теперь выберем такое число $t_1 \in (0, 1)$, что $F_t(U) \subset U$ для $0 \leq t \leq t_1$. Если k и l являются такими положительными числами, что $1/k, 1/l \leq t_1$, то

$$f_k|_U = f \circ F_{1/k}|_U \simeq f \circ F_{1/l}|_U \quad (\text{в } f(U \cap (Q \setminus X)) \subset V) = f_l|_U,$$

как и требуется в определении W -последовательности.

Пусть $C \subset Q \setminus X$ — произвольный компакт. Тогда множество $F(C \times I)$ также является компактным. При этом $F(C \times \{t\}) = F_t(C) \subset Q \setminus X$ при $t \in (0, 1]$ (это вытекает из условия 3) леммы). Кроме того, $F(C \times \{0\}) = F_0(C) = \text{id}(C) = C \subset Q \setminus X$, что следует из выбора компакта C . Следовательно,

компакт $D = f \circ F(C \times I)$ лежит в $Q \setminus Y$. Утверждается, что этот компакт является искомым. Пусть U — его произвольная окрестность. Тогда $F^{-1} \circ f^{-1}(U)$ является окрестностью компакта $C \times I$ в $Q \times I$. Так как отрезок I компактен, то существует такая окрестность V компакта X в Q , что $V \times I \subset \subset F^{-1} \circ f^{-1}(U)$. Теперь уже легко видеть, что

$$f_k|_V = f \circ F_{1/k}|_V \simeq f \circ F_{1/l}|_V \quad (\text{в } f \circ F(V \times I) \subset f \circ F \circ F^{-1} \circ f^{-1}(U) = U) = f_e|_V$$

для всех k и l , чем мы и показали, что последовательность отображений $f_k = f \circ F_{1/k} : Q \rightarrow Q$ является W -последовательностью из $Q \setminus X$ в $Q \setminus Y$ (в Q, Q).

Пусть теперь $g : Q \setminus Y \rightarrow Q \setminus X$ — гомеоморфизм, обратный к гомеоморфизму $f : Q \setminus X \rightarrow Q \setminus Y$. С помощью гомеоморфизма g и некоторой гомотопии $G \in F(Y)$ мы построим (тем же способом, каким мы выше построили последовательность отображений f_k) последовательность таких отображений $g_k : Q \rightarrow Q$, что $\mathbf{g} = \{g_k, Y, X\}_{Q, Q}$ и $\mathbf{g}' = \{g_k, Q \setminus Y, Q \setminus X\}_{Q, Q}$ являются W -последовательностями.

Покажем, что $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} \simeq i_{X, Q}$ и $\mathbf{g}' \circ \mathbf{f}' \simeq i_{Q \setminus X, Q}$.

Пусть U — произвольная окрестность компакта X в Q . Существуют такие окрестности $V \subset Q$ множества Y и $W \subset Q$ множества X , что $g(V \cap (Q \setminus Y)) \subset U$ и $f(W \cap (Q \setminus Y)) \subset V$ (выше уже обсуждалось, как можно построить такие окрестности). Можно дополнительно считать, что $W \subset U$. Выберем такое число $t_1 \in (0, 1)$, что $F_t(W) \subset W$ и $G_t|_V \subset V$ для $0 \leq t \leq t_1$. Тогда для всех положительных k , удовлетворяющих условию $1/k \leq t_1$, мы имеем

$$\begin{aligned} g_k \circ f_k|_W &= g \circ G_{1/k} \circ f \circ F_{1/k}|_W \simeq g \circ f \circ F_{1/k}|_W \\ &(\text{в } g \circ G_{[0, 1/k]} \circ f \circ F_{1/k}(W) \subset g \circ G_{[0, 1/k]}(V \cap (Q \setminus Y)) = \\ &= g(V \cap (Q \setminus Y)) \subset U) = F_{1/k}|_W \simeq F_0|_W \quad (\text{в } F_{[0, 1/k]}(W) = W \subset U) = \text{id}_W. \end{aligned}$$

Пусть $C \subset Q \setminus X$ — произвольный компакт. Тогда множество $F(C \times I)$ также является компактом и $F(C \times I) \subset Q \setminus X$, поэтому $B = f \circ F(C \times I)$ является компактом, лежащим в $Q \setminus Y$. Теперь повторяем это рассуждение. $G(B \times I)$ является компактом, лежащим в $Q \setminus Y$. Утверждается, что $D = g \circ G(B \times I)$ является искомым компактом, лежащим в $Q \setminus X$. Пусть U — произвольная окрестность компакта D . Так как отрезок I компактен, то существует такая окрестность $V (V \subset Q \setminus Y)$ множества B в Q , что $g \circ G(V \times I) \subset \subset U$. По той же причине существует такая окрестность $W (W \subset Q \setminus X)$ компакта C в Q , что $f \circ F(W \times I) \subset V$. Теперь уже легко видеть, что

$$\begin{aligned} g_k \circ f_k|_W &= g \circ G_{1/k} \circ f \circ F_{1/k}|_W \simeq \\ &\simeq g \circ G_0 \circ f \circ F_{1/k}|_W \quad (\text{в } g \circ G(f \circ F_{1/k}(W) \times I) \subset g \circ G(V \times I) \subset U) \simeq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\simeq g \circ G_0 \circ f \circ F_0|_W \text{ (в } g \circ G_0(f \circ F(W \times I)) \subset g \circ G_0(V) \subset \\ &\subset g \circ G(V \times I) \subset U) = g \circ f|_W = \text{id}_W. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично проверяется справедливость и следующих гомотопий:
 $f \circ g \simeq i_{Y,Q}$, $f' \circ g' \simeq i_{Q,Y,Q}$.

4. Замечание 1. В теореме 1 условия „ $X, Y \subset s$ “ можно ослабить до условий „ X, Y являются Z -множествами в Q “ [1] но нельзя, считать, что компакты X и Y вложены в Q произвольно. Это видно хотя бы из того, что если $X = Y = Q$, то X можно вложить в Q тождественно, и тогда $Q \setminus X = \emptyset$, а Y можно вложить в виде собственного подмножества, и тогда $Q \setminus Y \neq \emptyset$. Тем не менее Теорема 1 позволяет получить для гильбертова пространства некоторую абсолютную теорему. Так как любой компакт можно вложить в гильбертово пространство, то впредь мы будем говорить просто о компактах, предполагая, что они уже лежат в l_2 .

Теорема 2. Компакты X и Y имеют одинаковую форму в том и только в том случае, когда их расположения в l_2 совпадают.

Доказательство. Если $\text{Pos}(l_2, X) = \text{Pos}(l_2, Y)$, то по [4, теорема 7.3] $\text{Sh } X = \text{Sh } Y$, поэтому нам надо доказать лишь обратное утверждение. Пусть $\text{Sh } X = \text{Sh } Y$. По теореме Р. Д. Андерсона [1] пространства l_2 и s гомеоморфны, то есть существует гомеоморфизм $h : l_2 \rightarrow s$ и обратный ему гомеоморфизм $h^{-1} : s \rightarrow l_2$. Рассмотрим компакты $X' = h(X)$ и $Y' = h(Y)$. Тогда $\text{Sh } X' = \text{Sh } Y'$ и $X', Y' \subset s$. Множество $Z = X' \cup Y'$ является компактом, поэтому для $i \geq 1$ существуют такие числа α_i, β_i , что $-1 < \alpha_i < \beta_i < 1$ и $Z \subset s' = \prod_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$. Действительно, множество $\pi_i(Z)$, где π_i — проекция s на i -ый сомножитель, является компактом, поэтому существуют такие числа $\alpha_i > -1$ и $\beta_i < 1$, что для всякой точки $z \in Z$, $\pi_i(z) > \alpha_i$ и $\pi_i(z) < \beta_i$. Полученные числа α_i, β_i являются искомыми. Рассмотрим гильбертов кирпич $Q' = \prod_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i]$. Пусть теперь $r_i : [-1, 1] \rightarrow [\alpha_i, \beta_i]$ является такой ретракцией, что $r_i([-1, \alpha_i]) = [\alpha_i, \alpha_i]$ и $r_i([\beta_i, 1]) = [\beta_i, \beta_i]$. Легко видеть, что отображение $R : s \rightarrow Q'$, заданное по формуле $R(\{t_i\}) = \{r_i(t_i)\}$, является такой деформационной ретракцией пространства s на Q' , что $R(s \setminus Q') \cap s' = \emptyset$.

К компактам X', Y' , лежащим в $s' \subset Q'$, применяем теорему 1. Итак, существуют две последовательности таких отображений

$$f'_k : Q' \rightarrow Q' \text{ и } g'_k : Q' \rightarrow Q', \quad k = 1, 2, \dots,$$

что для них выполнены условия (1), (2), (3) и (4). Рассмотрим теперь две следующие

щие последовательности отображений:

$$f_k : l_2 \rightarrow l_2 \quad \text{и} \quad g_k : l_2 \rightarrow l_2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $f_k = h^{-1} \circ f'_k \circ R \circ h$ и $g_k = h^{-1} \circ g'_k \circ R \circ h$. Нетрудно проверить, что последовательности отображений f_k и g_k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условиям (1), (2), (3) и (4) для (l_2, X) , (l_2, Y) в l_2 , l_2 , поэтому $\text{Pos}(l_2, X) = \text{Pos}(l_2, Y)$, чем доказательство теоремы и завершено.

Замечание 2. Формы компактов, лежащих в конечномерном евклидовом пространстве, нельзя характеризовать их расположением. В самом деле, возьмем в пространстве E^3 дугу L_1 , содержащую множество Ангуана, и кусочно — линейную дугу L_2 . Тогда пространства $X = L_1$ и $Y = L_2$ даже гомеоморфны. Но по [2, пример 3] множество $E^3 \setminus L_2$ является гомотопно компактным [2], а по [2, пример 4] множество $E^3 \setminus L_1$ не является гомотопно компактным. Так как множество $E^3 \setminus L_1$ является открытым в E^3 и $E^3 \in AR(\mathfrak{M})$, то по теореме О. Ханнера [6] $E^3 \setminus L_1 \in ANR(\mathfrak{M})$. Следовательно, к пространству $E^3 \setminus L_1$ применима теорема Беннета-Борсука [2], и мы получаем, что $E^3 \setminus L_1$ не может W -доминироваться гомотопно-компактным множеством и, в частности, множеством $E^3 \setminus L_2$. Следовательно, $\text{Pos}(E^3, L_1) \neq \text{Pos}(E^3, L_2)$.

Если от компактов X и Y не требовать связности, то опровергающие примеры можно значительно упростить, и тогда их уже можно найти даже на плоскости. Действительно, пусть

$$X = \{x : x \in E^n \text{ и } \|x\| = 1\} \cup \{x : x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

и

$$Y = \{x : x \in E^n \text{ и } \|x\| = 1\} \cup \{x : x_i = 2, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Тогда X и Y даже гомеоморфны, но $\text{Pos}(E^n, X) \neq \text{Pos}(E^n, Y)$.

Литература

- [1] R. D. Anderson, Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 515—519.
- [2] R. Bennet and K. Borsuk, On homotopically compact spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972), 865—869.
- [3] K. Borsuk, Concerning homotopy properties of compacta. Fund. Math. 62 (1968), 223—254.
- [4] K. Borsuk, On positions of sets in spaces. Fund. Math. 79 (1973), 141—158.
- [5] T. A. Chapman, On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape. Fund. Math. 76 (1972), 181—193.
- [6] O. Hanner, Some theorems on absolute neighborhood retracts. Ark. Math. 1 (1951), 389—408.

Адрес авторов: СССР, Москва В-234, МГУ, Математическое отделение.