Czechoslovak Mathematical Journal

Ladislav Mišík

Über approximative derivierte Zahlen monotoner Funktionen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 26 (1976), No. 4, 579–583

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101428

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1976

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Czechoslovak Mathematical Journal, 26 (101) 1976, Praha

ÜBER APPROXIMATIVE DERIVIERTE ZAHLEN MONOTONER FUNKTIONEN

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

(Eingegangen am 2. Januar 1975)

A. KHINTCHINE hat bewiesen [2], daß eine monotone Funktion, die in einem Punkt die approximative Ableitung besitzt, besitzt in diesem Punkt auch die Ableitung und beide sind gleich. Wir werden hier zeigen, daß man in diesem Falle die approximative Ableitung durch die Menge aller approximativer derivierten Zahlen und die Ableitung durch die Menge aller derivierten Zahlen ersetzen kann und der so veränderte Satz gilt ebenfalls.

Über die Funktion f werden wir im ganzem Artikel voraussetzen, daß sie eine reelle auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte Funktion ist. Es sei $\langle -\infty, \infty \rangle$ die Menge $(-\infty, \infty) \cup \{-\infty, \infty\}$ mit der üblichen Topologie.

Es sei $\alpha \in \langle -\infty, \infty \rangle$. Dann heißt α eine derivierte Zahl von links im x der Funktion f dann und nur dann, wenn x ein Häufungspunkt von links der Menge $\{u : (f(x) - f(u))/(x - u) \in I\}$ für jedes offene, α enthaltende Intervall I im $\langle -\infty, \infty \rangle$ ist[1]). Die Zahl α heißt eine approximative derivierte Zahl von links im x der Funktion f, wenn die obere äußere Dichte der Menge $\{u : u < x, (f(x) - f(u))/(x - u) \in I\}$ im x positiv für jedes offene, α enthaltende Intervall I im $\langle -\infty, \infty \rangle$ ist. Jede approximative derivierte Zahl von links im x der Funktion f ist auch eine derivierte Zahl von links im x der Funktion f. Ähnlich sind die derivierten Zahlen von rechts, die approximativen derivierten Zahlen von rechts, die derivierten Zahlen und die approximativen derivierten Zahlen im x der Funktion f definiert.

Lemma 1. *Es sei f eine nichtfallende Funktion, es sei $y < u < x$ und*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{f(x) - f(u)}{x - u}.$$

Dann existiert so ein $\xi \in (y, u)$, daß $(f(x) - f(\xi))/(x - \xi) \in (\alpha, \beta)$ ist.

Beweis. Wir werden voraussetzen, daß das Lemma nicht gilt. Dann existiert ein solches y und u, daß $y < u < x, (f(x) - f(y))/(x - y) \leqq \alpha < \beta \leqq$

[1]) Wenn $\alpha = \infty$, bzw. $\alpha = -\infty$, dann bedeutet I ein Intervall $(K, \infty\rangle$, bzw. $\langle -\infty, K)$, wobei $K \in (-\infty, \infty)$ ist.

$\leqq (f(x) - f(u))/(x - u)$ und $(f(x) - f(z)/(x - z) \notin (\alpha, \beta)$ für jedes $z \in (y, u)$ ist. Setzen wir $t = \sup \{v \in \langle y, u\rangle : f(x) - f(v)/(x - v) \leqq \alpha\}$. Es ist offensichtlich, daß $t \in \langle y, u\rangle$ ist. Dann existiert für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein solches v_n, daß $v_n \in \langle y, u\rangle$, $v_n \leqq t$, $\lim_{n\to\infty} v_n = t$ und $(f(x) - f(v_n))/(x - v_n) \leqq \alpha$ ist. Daraus bekommen wir, daß $f(x) - f(t) \leqq f(x) - f(v_n) \leqq \alpha(x - v_n)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Es gilt also $(f(x) - f(t))/(x - t) \leqq \alpha$. Daraus bekommt man, daß $t \neq u$ ist. Aus der Definition von t folgt, daß $(f(x) - f(z))/(x - z) \geqq \beta$ für jedes $z \in (t, u\rangle$ gilt. Daraus bekommen wir, daß $\beta(x - z) \leqq f(x) - f(z) \leqq f(x) - f(t)$ für jedes $z \in (t, u\rangle$ gilt. Es gilt also: $\beta \leqq (f(x) - f(t))/(x - t)$. Das ist ein Widerspruch mit $(f(x) - f(t))/(x - t) \leqq \leqq \alpha < \beta$.

Satz 1. *Es sei f eine nichtfallende Funktion und α eine derivierte Zahl von links im x der Funktion f. Dann ist α auch eine approximative derivierte Zahl von links im x der Funktion f.*

Beweis. Wir definieren I und J folgendermaßen: $I = \langle 0, \varepsilon)$, $J = \langle 0, \frac{1}{2}\varepsilon)$, wenn $\alpha = 0$ ist. Dabei gilt $\varepsilon > 0$. $I = (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, $J = (\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon, \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon)$, wenn $0 < < \alpha < \infty$, wobei $0 < \varepsilon < \alpha$ ist. $I = (K, \infty\rangle$, $J = (2K, \infty\rangle$, wenn $\alpha = \infty$, wobei $K > 0$ ist.

Es sei $B = \{u : u < x, (f(x) - f(u))/(x - u) \in J\}$. Dann ist $x \in \bar{B}$ ($\bar{B}$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von B). Wir werden zeigen, daß die äußere Dichte der Menge $A = \{u : u < x, (f(x) - f(u))/(x - u) \in I\}$ im x von links positiv ist. Damit wird der Satz bewiesen.

Es sei

$$d = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2\alpha + 2\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2\alpha - \varepsilon}\right) > 0$$

und $h > 0$. Dann existiert ein solches $t \in (x - h, x)$, daß $(f(x) - f(t))/(x - t) \in J$ ist.

a) Es sei $\alpha = 0$. Dann gilt $0 \leqq (f(x) - f(t))/(x - t) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Daraus folgt, daß für $u \in \langle t, x - (f(x) - f(t))/\varepsilon)$ die Ungleichung $0 \leqq (f(x) - f(u))/(x - u) < \varepsilon$ gilt. Also ist $\langle t, x - (f(x) - f(t))/\varepsilon) \subset A$. Daraus bekommt man, daß

$$\frac{|A \cap (t, x)|}{|(t, x)|} \geqq \frac{\left|\left(t, x - \dfrac{f(x) - f(t)}{\varepsilon}\right)\right|}{x - t} = \frac{x - t - \dfrac{f(x) - f(t)}{\varepsilon}}{x - t} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\varepsilon}\frac{f(x) - f(t)}{x - t} > 1 - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2} \geqq d$$

gilt.

b) Es sei $0 < \alpha < \infty$. Dann gilt: $\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon < (f(x) - f(t))/(x - t) < \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon$. Es können zwei Fälle entstehen: entweder b_1) $\langle t, x - (f(x) - f(t))/(\alpha + \varepsilon)) \subset A$ oder b_2) $\langle t, x - (f(x) - f(t))/(\alpha + \varepsilon)) - A \neq \emptyset$.

b_1) In diesem Falle gilt folgendes:

$$\frac{|A \cap (t, x)|}{|(t, x)|} \geqq \frac{\left|\left(t, x - \dfrac{f(x) - f(t)}{\alpha + \varepsilon}\right)\right|}{x - t} = \frac{x - t - \dfrac{f(x) - f(t)}{\alpha + \varepsilon}}{x - t} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\alpha + \varepsilon} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} > 1 - \frac{\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon}{\alpha + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2\alpha + 2\varepsilon} \geqq d\,.$$

b_2) Weil $\langle t, x - (f(x) - f(t))/(\alpha + \varepsilon)) - A \neq \emptyset$ ist, existiert ein solches $y \in \in (t, x - (f(x) - f(t))/(\alpha + \varepsilon))$, für welches $y \notin A$, d. h. $(f(x) - f(y))/(x - y) \notin I$ ist. Da $t < y < x - (f(x) - f(t))/(\alpha + \varepsilon)$ gilt, bekommen wir: $f(x) - f(y) \leqq \leqq f(x) - f(t) < (\alpha + \varepsilon)(x - y)$ und weiter $(f(x) - f(y))/(x - y) < \alpha + \varepsilon$. Darum muß $(f(x) - f(y))/(x - y) \leqq \alpha - \varepsilon$ gelten.

Da $x \in \bar{B}$ gilt, bekommen wir, daß die Menge $\{u : y < u < x, (f(x) - f(u)) : : (x - u) \in J\}$ nicht leer ist. Es sei $z = \inf\{u : y < u < x, (f(x) - f(u))/(x - u) \in \in J\}$. Dann existiert eine Folge $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, für welche $z \leqq u_n$, $u_n \in B$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $\lim_{n \to \infty} u_n = z$ ist. Daraus bekommen wir: $f(x) - f(z) \geqq f(x) - f(u_n) > (\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon) \,.\, (x - u_n)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und weiter $(f(x) - f(z))/(x - z) \geqq \alpha - \frac{1}{2}\varepsilon$.

Für jedes $u \in (x - (f(x - f(z))/(\alpha - \varepsilon), z\rangle$ gilt also: $(\alpha - \varepsilon)(x - u) < f(x) - - f(z) \leqq f(x) - f(u)$ und $(f(x) - f(u))/(x - u) > \alpha - \varepsilon$.

Jetzt beweisen wir, daß $(f(x) - f(u))/(x - u) \leqq \alpha - \frac{1}{2}\varepsilon$ für jedes $u \in (x - (f(x) - - f(z))/(\alpha - \varepsilon), z\rangle$ gilt. Wenn nämlich ein solches $u \in (x - (f(x) - f(z))/(\alpha - \varepsilon), z\rangle$ existiert, für welches $\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon < (f(x) - f(u))/(x - u)$ gilt, dann muß eine solche Zahl β existieren, für welche $\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon < \beta < (f(x) - f(u))/(x - u)$ und $\beta < \alpha + + \frac{1}{2}\varepsilon$ gilt. Daraus folgt: $y < u < x$ und $(f(x) - f(y))/(x - y) < \alpha - \varepsilon < \alpha - - \frac{1}{2}\varepsilon < \beta < (f(x) - f(u))/(x - u)$. Nach dem Lemma 1 existiert ein solches $\xi \in (y, u)$, daß $(f(x) - f(\xi))/(x - \xi) \in (\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon, \beta) \subset J$ ist. Nachdem $y < \xi < z$ ist, wiederspricht dieses der Eigenschaft des Infimums, welches die Zahl z bestimmt.

Aus der Ungleichung $\alpha - \varepsilon < (f(x) - f(u))/(x - u) \leqq \alpha - \frac{1}{2}\varepsilon$, welche für jedes $u \in (x - (f(x) - f(z))/(\alpha - \varepsilon), z\rangle$ gilt und aus der Ungleichung $\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon \leqq \leqq (f(x) - f(z))/(x - z)$ bekommen wir: $(x - (f(x) - f(z))/(\alpha - \varepsilon), z\rangle \subset A$ und $f(x) - f(z) = (\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon)(x - z)$. Daraus folgt:

$$\frac{\left|A \cap \left(x - \dfrac{f(x) - f(z)}{\alpha - \varepsilon}, x\right)\right|}{\left(x - \dfrac{f(x) - f(z)}{\alpha - \varepsilon}, x\right)} \geqq \frac{z - x + \dfrac{f(x) - f(z)}{\alpha - \varepsilon}}{\dfrac{f(x) - f(z)}{\alpha - \varepsilon}} =$$

$$= 1 - (\alpha - \varepsilon)\frac{x - z}{f(x) - f(z)} = 1 - \frac{\alpha - \varepsilon}{\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2\alpha - \varepsilon} \geqq d\,.$$

c) Es sei $\alpha = \infty$. Dann gilt $(f(x) - f(t))/(x - t) > 2K$. Dann können folgende zwei Fälle entstehen: entweder $c_1)$ $(t, x) \subset A$ oder $c_2)$ $(t, x) - A \neq \emptyset$.

c_1) In diesem Falle gilt: $|A \cap (t, x)|/|(t, x)| = 1 \geqq d$.

c_2) In diesem Falle existiert ein solches $y \in (t, x)$, daß $y \notin A$, d. h. $(f(x) - f(y)) : (x - y) \leqq K$ ist. Weil $x \in \bar{B}$ ist, existiert ein solches $z \in (y, x)$, für welches $z \in B$, d. h. $(f(x) - f(z))/(x - z) > 2K$ ist. Daraus bekommen wir, daß $(f(x) - f(z)) : (x - z) > 2K > K$ und $x - (f(x) - f(z))/K < z$ gilt. Dann gilt für jedes $u \in \in (x - (f(x) - f(z))/K, z\rangle : K(x - u) < f(x) - f(z) \leqq f(x) - f(u)$ und weiter $K < (f(x) - f(u))/(x - u)$.

Damit haben wir bewiesen, daß $y \leqq x - (f(x) - f(z))/K$ und $(x - (f(x) - f(z)) : K, z\rangle \subset A$ ist. Daraus folgt die Ungleichung:

$$\frac{\left|A \cap \left(x - \dfrac{f(x) - f(z)}{K}, x\right)\right|}{\left|\left(x - \dfrac{f(x) - f(z)}{K}, x\right)\right|} \geqq \frac{z - x + \dfrac{f(x) - f(z)}{K}}{\dfrac{f(x) - f(z)}{K}} =$$

$$= 1 - \frac{K}{\dfrac{f(x) - f(z)}{x - z}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \geqq d\,.$$

Es wurde also bewiesen, daß für jedes $h > 0$ ein solches $t \in (x - h, x)$ existiert, für welches $|A \cap (t, x)|/|(t, x)| \geqq d$ gilt. Demzufolge ist die obere äußere Dichte der Menge A im x von links mindestens gleich d, also positiv.

Aus dem Satz 1. bekommen wir:

Satz 2. *Es sei f eine monotone Funktion. Dann ist die Menge aller approximativen derivierten Zahlen von links im x der Funktion f (die Menge aller approximativen derivierten Zahlen von rechts im x der Funktion f, bzw. die Menge aller approximativen derivierten Zahlen im x der Funktion f) der Menge aller derivierten Zahlen von links im x der Funktion f (der Menge aller derivierten Zahlen von rechts im x der Funktion f, bzw. der Menge aller derivierten Zahlen im x der Funktion f) gleich.*

In der Arbeit ([4], Corollary 1.) bewies L. Zajíček folgendes:

Die Menge aller Zahlen x, für die $D^+_{ap} f(x) \cap D^-_{ap} f(x) = \emptyset$ gilt, ist höchstens abzählbar für jede reelle Funktion f, die die Lipschitzeigenschaft besitzt. Dabei bedeutet $D^+_{ap} f(x)$, bzw. $D^-_{ap} f(x)$ die Menge aller approximativen derivierten Zahlen von rechts, bzw. von links im x der Funktion f.

In der Arbeit [3] ist das Resultat von L. Zajíček mit Hilfe eines Satzes von V. Jarník [1] bewiesen. Aus unserem Satz 2. und aus dem Resultat von V. Jarník [1] folgt, daß die Behauptung von L. Zajíček auch für monotone Funktionen gilt, d. h. es gilt:

Satz 3. *Die Menge aller Zahlen x, für die* $\mathrm{D}_{\mathrm{ap}}^{+} f(x) \cap \mathrm{D}_{\mathrm{ap}}^{-} f(x) = \emptyset$ *gilt, ist für jede reelle monotone Funktion f höchstens abzählbar.*

Wir bemerken, daß unserer Satz 3. nicht vom Satz 2. von L. Zajíček ([4]) abgeleitet werden kann.

Literatur

[1] *Jarník V.:* Sur les fonctions de deux variables réelles, Fund. Math. *27* (1936), 147—150.

[2] *Khintchine A.:* Recherches sur la structure des fonctions mesurables, Fund. Math. *9* (1927), 212—279.

[3] *Mišík L.:* Über approximative derivierte Zahlen, Czech. Math. J. *25* (*100*) 1975, 154—159.

[4] *Zajíček L.:* On the intersection of the sets of the right and left internal approximate derivatives, Czech. Math. J. *23* (*98*) (1973), 629—634.

Anschrift des Verfassers: 886 25 Bratislava, Obrancov mieru 49, ČSSR (Matematický ústav SAV).