

G. Ja. Rotkovič

О дизъюнктно полных архимедовых полуупорядоченных группах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 27 (1977), No. 4, 523–527

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101489>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1977

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О ДИЗЬЮНКТНО ПОЛНЫХ АРХИМЕДОВЫХ
ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХГ. Я. Роткович, Ленинград
(Поступило в редакцию 26/VI 1975 г.)

1. Введение. Исследованием связей между различными видами полноты в l -группах (полуупорядоченных группах, решеточно упорядоченных группах) занимались С. Бернау, А. И. Векслер, В. А. Гейлер, П. Конрад, Я. Якубик, автор и другие математики. Для случая, когда l -группа является архимедовой векторной решеткой окончательные результаты были получены А. И. Векслером и В. А. Гейлером в [5]. Для l -групп Я. Якубик в [13] и автор в [10] независимо друг от друга показали, что полнота l -группы равносильна тому, что она является σ -полной и дизъюнктно полной. В этой работе результаты А. И. Векслера и В. А. Гейлера переносятся на случай произвольной архимедовой l -группы, причем теорема 3 является усилением названного выше результата Я. Якубика и автора. Но доказательства совершенно иные, чем в упомянутых выше работах. В частности, в [5] сначала получен аналог теоремы 2 и с его помощью доказывается аналог теоремы I, а в данной работе наоборот. Отчасти это происходит потому, что нельзя использовать некоторые специфические свойства векторных решеток.

2. Некоторые определения и понятия. Будем использовать, в основном, терминологию и обозначения из [6] и [8]. Те понятия, которые не разъяснены в работе, имеют одинаковый смысл для l -групп и для векторных решеток и их можно найти в книге [6].

Группа X называется l -группой (полуупорядоченной группой, решеточно упорядоченной группой), если она является одновременно решеткой, в которой из $x > y$ следует $x + z > y + z$ для любого $z \in X$.

Архимедова l -группа является абелевой (см., например, [3], гл. XIV), что оправдывает применяемую здесь аддитивную запись групповой операции.

В l -группе X элемент x называется *полулинейным*, если для всякого $y \in X$, $0 < y \leq x$ существует $z \in X$ такой, что $0 < 2z \leq y$. Если всегда можно подобрать z так, чтобы выполнялось точное равенство, то x называется *линейным*.

Элемент $x \in X$ дизъюнктивный всем полулинейным элементам, называется d -элементом. Если l -группа не содержит полулинейных элементов, т.е. состоит из d -элементов, то она называется *сингулярной*.

Если в l -группе любое (ограниченное) дизъюнктивное множество имеет супремум и инфимум, то она называется *латерально (дизъюнктивно) полной*. Понятие латеральной полноты было введено П. Конрадом в [7], понятие дизъюнктивной полноты А. И. Векслером в [4].

Компонентой l -группы X называется всякое множество $X_1 \subset X$ являющееся дизъюнктивным дополнением какого-то $E \subset X$, т.е. $X_1 = \{x \in X : |x| \wedge |e| = 0, \forall e \in E\}$. Наименьшая компонента X_x содержащая данный элемент x , называется *главной* или *порожденной элементом x* . *Проекцией* элемента x в компоненту X_1 называется такой $x_1 \in X_1$ (если он существует), что $(x - x_1) dX_1$. Если в l группе X существует проекция любого элемента во всякую (главную) компоненту, то X называется *l -группой с проекциями (в главную компоненту)*.

Латерально полная l -группа с проекциями называется *ортополной*. Понятие ортополноты было введено С. Бернау в [1].

3. Связь между латеральной и дизъюнктивной полнотой с существованием проекций.

Лемма 1. *Для архимедовой латерально полной группы X ее пополнение по Дедекинду (K -пополнение) \hat{X} тоже латерально полно.*

Доказательство. Непрерывные функции, отображающие топологическое пространство P в расширенное множество вещественных чисел, которые могут принимать на нигде не плотных множествах из P значения $\pm \infty$, будем называть *расширенными*. Как известно (см., например, [2], [7]), архимедова l -группа X алгебраически и решеточно изоморфна l -группе расширенных функций на экстремально несвязном бикомпакте $Q = Q(X)$, являющемся стоуновым пространством булевой алгебры компонент из X (упорядочение по включению). Бикомпакт Q будем называть *каноническим для l -группы X* . Соответствующий изоморфизм будем называть *реализацией или представлением X на ее каноническом бикомпакте*. Реализовать l -группу на Q можно различными способами. Образ элемента $x \in X$ в данной реализации будем обозначать $x(\cdot)$, а сам X имеет образом $X(\cdot)$. *Носителем $x \in X$* будем называть множество

$$Q_x = \text{cl}\{q \in Q : x(q) \neq 0\}.$$

Из латеральной полноты X следует, что для любого $q \in Q$ найдется $x(\cdot) \in X_+(\cdot)$ такой, что $x(q) > 0$. В самом деле, для любой окрестности U точки q найдется точка $q_\alpha \in U$ и функция $x_\alpha(\cdot) \in X_+(\cdot)$ такие, что $x_\alpha(q_\alpha) > 0$. Подберем дизъюнктивную систему $\{x_\alpha\}$ такую, что $\text{cl}(\bigcup_\alpha Q_{x_\alpha}) \supset U$. Умножая затем в случае необходимости x_α на подходящие $n_\alpha \in N$, получим, что $x(\cdot) = \sup \{x_\alpha(\cdot)\}$ больше нуля во всех точках $Q_x \supset U$.

Также из латеральной полноты следует, что всякое открыто-замкнутое множество из Q является носителем элемента из X .

Обозначим через $C_\infty(Q)$ условно полную l -группу всех расширенных функций на Q , она является даже расширенным K -пространством (см., например, [6]).

Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого $x(\cdot) \in C_\infty^+(Q)$ найдется $y(\cdot) \in X(\cdot)$ такой, что $x(\cdot) \leq y(\cdot)$. Пусть

$$Q_\infty = \{q \in Q : x(q) = +\infty\},$$

$Q_n = \text{cl int} \{q \in Q : n + 1 \geq x(q) > n\}$. В силу экстремальной несвязности все Q_n попарно не пересекаются. По построению $Q_x = \text{cl}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n) = Q_\infty \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$.

Для каждой точки $q \in Q_n$ найдется $y_q \in X_+$, для которой $y_q(q) > 1$; $y_q(\cdot) = 0$ на $Q \setminus Q_n$. В силу компактности Q_n существует $y_n = y_{q_1} \vee \dots \vee y_{q_n} \in X$ такой, что $y_n(q) \geq 1$ во всех точках из Q_n . Подбирая подходящие $m_n \in \mathbb{N}$ получим, что $y_n(q) = m_n y_n(q) \geq x(q)$ во всех $q \in Q_n$. В силу латеральной полноты $y = \sup \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \in X$. По построению $x(\cdot) \leq y(\cdot)$, что и завершает доказательство леммы.

Теорема 1. Для архимедовой l -группы X понятия латеральной полноты и ортополноты совпадают.

Доказательство. В силу определения из ортополноты во всякой l -группе следует латеральная полнота. Следовательно, нужно показать, что из латеральной полноты архимедовой l -группы X следует ортополнота. В каждой компоненте $X_1 \subset X$ можно выбрать (используя лемму Цорна) полную систему попарно дизъюнктивных положительных элементов $\{x_\alpha\}$. В силу латеральной полноты в X существует $x = \sup \{x_\alpha\}$. По построению x порождает компоненту X_1 . Значит, все компоненты латерально полной l -группы — главные. Таким образом, достаточно показать, что X является группой с проекциями в главную компоненту.

Из теоремы 2.11 из [12] несложно выводится, что сингулярная подгруппа X'' группы X является полной. Как следует из теоремы 1 из [10] X является прямой суммой двух подгрупп: X' , состоящей из полулинейных элементов, и сингулярной X'' , т.е. любой $x \in X$ единственным образом представляется в виде $x = x' + x''$; $x' \in X'$, $x'' \in X''$. Таким образом, не уменьшая общности, можно считать, что $X = X'$, т.е. не содержит d -элементов.

В силу леммы 1 \hat{X} является расширенным K -пространством.

Так как существование проекций в компоненту у $x \in X$ равносильно существованию проекций у x_+ и x_- , то в дальнейшем рассуждении ограничимся рассмотрением положительных элементов. Пусть y_x — проекция произвольного элемента $y \in X_+$ в компоненту \hat{X}_x . В силу свойств K -пополнения существует $z \in X_x$ такой, что $0 < y_x \leq z$. Тогда $y_x = y \wedge z \in X$ и является проекцией у в X . Теорема доказана.

Теорема 2. *Дизъюнктно полная архимедова l -группа X является группой с проекциями.*

Доказательство. Как показал П. Конрад ([7], теорема 3.5) у X существует единственным образом определенное латеральное пополнение X^\wedge т.е. наименьшая латерально полная l -группа, содержащая l -подгруппу, алгебраически и решеточно изоморфную X . При этом из архимедовости X следует архимедовость X^\wedge . Из дизъюнктной полноты X несложно выводится, что она является идеалом в X^\wedge . Из этого и теоремы 1 следует, что X является группой с проекциями.

4. Основная теорема. Напомним еще некоторые понятия. В l -группе X последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется (r) -фундаментальной, если существует $u \in X_+$ и $N \ni m_n \rightarrow +\infty$ такие, что $m_n | x_{n+p} - x_n | \leq u$ для любого $p \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{x_n\}$ называется (r) -сходящейся к $x \in X$ (с регулятором u), если $m_n | x - x_n | \leq u$. Архимедова l -группа называется (r) -полной, если в ней всякая (r) -фундаментальная последовательность (r) -сходится. Известно, что σ -полная l -группа (r) -полна, а всякий l -идеал (r) -полной l -группы сам (r) -полон.

Лемма 2. *Латерально полная (r) -полная l -группа X — полна.*

Доказательство. В силу определения (r) -полноты X — архимедова. А тогда, как уже отмечалось в доказательстве теоремы 1, X является прямой суммой подгрупп X' , состоящей из полулинейных элементов, и сингулярной X'' . Полнота X'' была доказана Я. Якубиком ([12], теорема 2.12). Следовательно, чтобы доказать лемму, достаточно доказать, что X' — полна.

Покажем сначала, что в X' все полулинейные элементы — линейны. Поскольку линейность x равносильна линейности $|x|$, то будем в следующем ниже рассуждении предполагать, что все рассматриваемые элементы положительны. Пусть $x, x_n \in X'_+$ ($n \in \mathbb{N}$), причем x — произвольный, а x_n таковы, что $0 < 2^n x \leq x$ и $X_x = X_{x_n}$. Обозначим через $x_{nm} = x - x \wedge 2m x_n$, через X_{nm} компоненту в $X_{x_{nm}}$, являющуюся дизъюнктным дополнением к $X_{x_{nm+1}}$. В силу теоремы 1 X_{nm} — компонента с проекциями, следовательно, $y_{nm} = \text{Pr}_{X_{nm}} x_n$ существует в X . Поскольку все y_{nm} попарно дизъюнктны, то в X при всяком $n \in \mathbb{N}$ существует и $y_n = \sup \{2m y_{nm} : m \in \mathbb{N}\}$. Покажем, что последовательность $\{y_n\}$ — (r) -сходится к x с регулятором x . Реализуем X так, чтобы $x(q) = 1$ на своем носителе. Тогда $1 \geq 2m y_{nm}(q) > 1 - 1/2^{n-1}$ на носителе $y_{nm}(\cdot)$ для всех $y_{nm} \neq 0$. Поскольку $y_{nm} = 0$, если $2m < n$, то $1 \geq y_n(q) > 1 - 1/2^n$ на своем носителе. Последнее неравенство и означает, что $\{y_n\}$ (r) -сходится к x . Пусть теперь $z = \sup \{m y_{nm} : m \in \mathbb{N}\}$. По построению $2z_n = y_n$ и последовательность $\{z_n\}$ (r) -фундаментальна. В силу (r) -полноты эта последовательность (r) -сходится к $z \in X$. Ясно, что $2z = x$. Итак, x — линейен. В силу произвольности x и все элементы из X — линейны.

По теореме 1 из [11] X' является векторной решеткой. В силу теоремы 4 из [5] (r) -полная дизъюнктно полная векторная решетка является K -пространством, что и доказывает лемму.

Теорема 3. Для l -группы X равносильны условия:

- (I) X является полной;
- (II) X является (r) -полной и дизъюнктно полной.

Доказательство. В доказательстве нуждается только импликация (II) \Rightarrow (I).

Итак, пусть X — дизъюнктно полная (r) -полная l -группа. Она является l -идеалом в своем латеральном пополнении X^\wedge , которое по лемме 2 является полной l -группой. Хорошо известно, что полная l -группа представляется в виде прямой суммы K -пространства и полной сингулярной l -группы. Подгруппы группы X , сингулярная X'' и X' , состоящая из полулинейных элементов, оказываются сами полными как l -идеалы полных l -групп. Тогда и сама X является полной, как прямая сумма полных групп.

Замечание. Примеры из [11] показывают, что (r) -полная l -группа с проекциями не обязана быть полной. При этом могут быть неполными и сингулярная подгруппа X'' и подгруппа X' , состоящая из полулинейных элементов.

В заключение приношу благодарность В. А. Гейлеру и А. И. Векслеру, внимательно прочитавшим рукопись, а также рецензенту журнала, чьи замечания способствовали улучшению изложения.

Литература

- [1] S. Bernau: Ortoprocompletion of a lattice groups. Proc. London Math. Soc. 1966, 16, № 1, 107—130.
- [2] S. Bernau: Unique representation of archimedean lattice groups and normal archimedean lattice rings. Proc. London Math. Soc. 1965, 15, № 4, 599—631.
- [3] Г. Биркгоф: Теория структур. ИЛ, М., 1952.
- [4] А. И. Векслер: О банаховой и деджиндовой полноте пространств непрерывных функций, векторных структур и максимальных колец частных, ДАН СССР, 1971, 196, № 1, 20—23.
- [5] А. И. Векслер и В. А. Гейлер: О порядковой и дизъюнктно полноте линейных упорядоченных пространств. Сибирск. матем. журн. 1972, 13, № 1, 43—51.
- [6] Б. З. Вулих: Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, М., 1961.
- [7] P. Conrad: The lateral completion of a lattice-ordered group. Proc. London Math. Soc. 1969, 19, № 3, 444—480.
- [8] Г. Я. Роткович: О полуупорядоченных группах. Уч. зап. Лен. педаг. ин-та, 1971, 404, 439—451.
- [9] Г. Я. Роткович: О σ -полных решеточно упорядоченных группах. XXVII Герценовские чтения. Математика. Лен. педаг. ин-т, Л., 1974.
- [10] Г. Я. Роткович: О σ -полных решеточно упорядоченных группах. Czechoslovak Math. J. 1975, 25, 279—281.
- [11] Г. Я. Роткович: Об относительно равномерно полных полуупорядоченных группах. Сб. „Функциональный анализ“, 2, Ульяновск, 1974.
- [12] J. Jakubik: On σ -complete lattice ordered groups. Czechoslovak Math. J. 1973, 23, 164—174.
- [13] J. Jakubik: Conditionally ortogonally complete l -groups. Math. Nachr. 1975, 65, 153—162.

Адрес автора: Ленинград, 194017, Дрезденская ул., 26, кв. 27, СССР