Heinz Damm

Zur Zerlegung des E_n durch einfache Hyperflächen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 28 (1978), No. 3, 480–483

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101553`

Czechoslovak Mathematical Journal, 28 (103) 1978, Praha

ZUR ZERLEGUNG DES E_n DURCH EINFACHE HYPERFLÄCHEN

HEINZ DAMM, Berlin

(Eingegangen am 2. Februar 1977)

EINLEITUNG

In [2] wurde eine geometrische Konzeption für den Aufbau einer qualitativen Theorie der nichtlinearen Optimierung entwickelt. Im Falle der konvexen Optimierung konnte diese Konzeption bereits mit Erfolg angewandt werden [4]. Eine zentrale Stellung nehmen in [2] die einfachen Flächen ein. Für abgeschlossene einfache Hyperflächen wurde gezeigt [2], daß diese den E_n in genau zwei Gebiete zerlegen. Die Zerlegung des E_n durch homöomorphe Bilder von abgeschlossenen einfachen Hyperflächen ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Dabei wird in den Fällen, wo der E_n als topologischer Raum aufgefaßt wird, die natürliche Topologie zugrunde gelegt. Mit $S_n = \{x \in E_{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (x_i)^2 = 1\}$ wird die n-Sphäre bezeichnet. Schließt man E_n mit einem unendlich fernen Punkt ∞ ab, so sind $\bar{E}_n = E_n \cup \{\infty\}$ und S_n in bekannter Weise homöomorph zueinander. Begriffe und Bezeichnungen, die im folgenden aus [2] übernommen wurden, werden als solche gegennzeichnet und hier nich noch einmal erklärt.

ZERLEGUNGSSÄTZE

Es sei $M_{n-1} \subset E_n$ eine einfache Hyperfläche [2] und $M \subset E_n$ homöomorph zu M_{n-1}. Wie Beispiel 1 zeigt, braucht M keine einfache Hyperfläche zu sein.

Beispiel 1. Sei

$$M = \{x \in E_2 \mid 0 \leqq x_1 \leqq 1,\ x_2 = (x_1)^2\} \cup \{x \in E_2 \mid 0 \leqq x_1 \leqq 1,\ x_2 = (x_1)^3\}\,.$$

Man überzeigt sich sofort, daß in $x = (0, 0)$ die Definition der einfachen Hyperfläche nicht erfüllbar ist. Andererseits ist M homöomorph zu S_1 und S_1 ist eine einfache Hyperfläche in E_2.

Gilt $M_{n-1} = \overline{M}_{n-1}$, so zerlegt M_{n-1} den E_2 in genau zwei Gebiete [2].

Beispiel 2. Sei $M_{n-1} = \{x \in E_2 \mid -\frac{1}{2}\pi < x_1 < \frac{1}{2}\pi,\ x_2 = \tan x_1\}$. Dann ist M_{n-1} eine einfache Hyperfläche in E_2 und es gilt $M_{n-1} = \overline{M}_{n-1}$. Die Mengen M_{n-1} und $M = \{x \in E_2 \mid -\frac{1}{2}\pi < x_1 < \frac{1}{2}\pi,\ x_2 = 0\}$ sind homöomorph und M ist eine einfache Hyperfläche in E_2. Man sieht aber sofort, daß M nicht abgeschlossen ist und den E_2 nicht zerlegt. Daraus folgt, daß das homöomorphe Bild einer abgeschlossenen einfachen Hyperfläche den E_n nicht zu zerlegen braucht.

Die abgeschlossenen einfachen Hyperflächen besitzen folgende Eigenschaft.

Satz 1. *Sei $M_{n-1} = \overline{M}_{n-1} \subset E_n$. Dann ist M_{n-1} gemeinsame Begrenzung der Gebiete G_1 und G_2, in die der E_n durch M_{n-1} zerlegt wird.*

Beweis. Der Beweis wird nur skizziert. Es werden die Bezeichnungen und Ergebnisse des § 4 von [2] benutzt. Sei $Z(M_{n-1}) = \bigcup_{x \in M_{n-1}} U(x)$ eine Z-Überdeckung von M_{n-1}. Dann zerlegt M_{n-1} jedes $U(x)$ in genau zwei Gebiete ${}^1U(x)$ und ${}^2U(x)$ ([2], § 4, Beh. 1). Aus dem in [2] dafür angegebenen Beweis folgt sofort, daß für jedes feste $x^0 \in M_{n-1}$ jedes $x \in M_{n-1} \cap U(x^0)$ Begrenzungspunkt von ${}^1U(x^0)$ und ${}^2U(x^0)$ ist. Berücksichtigt man jetzt die Konstruktion der Gebiete G_1 und G_2 aus den Mengen ${}^1U(x)$ und ${}^2U(x)$ ([2], § 4, Beh. 2, 3 und 4), so folgt sofort, daß jeder Punkt von M_{n-1} Begrenzungspunkt von G_1 und G_2 ist.

Es sei jetzt $M \subset E_n$ abgeschlossen und homöomorph zu einer abgeschlossenen einfachen Hyperfläche M_{n-1} von E_n. Der Homöomorphismus von M auf M_{n-1} werde mit φ bezeichnet. Zunächst wird der Fall betrachtet, daß M_{n-1} unbeschränkt ist. Dann ist auch M unbeschränkt und es gilt folgende Aussage.

Lemma 1. *Für jedes hinreichend große $d \in E_1$ $d > 0$ existiert ein $h \in E_1$, $h > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Die Punktmenge $N(H) = \{x \in E_n \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 > h\} \cap$ $\cap\, M$ wird durch φ in die Punktmenge $Q(d) = \{x \in E_n \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 > d\} \cap M_{n-1}$ abgebildet.*

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, für $d^* > 0$ existiert kein h mit der genannten Eigenschaft. Dann gibt es zu jedem $h > \tilde{h} > 0$ ein $x(h) \in$ $\in N(h)$ mit $\varphi(x(h)) \notin Q(d^*)$. Folglich gilt $\varphi(x(h)) \in \{x \in E_n \mid \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \leqq d^*\} \cap M_{n-1} =$ $= \tilde{Q}(d^*)$. Sei jetzt $h_{v+1} = h_v + 1$, $h_1 > \tilde{h} > 0$ und $v = 1, 2, \ldots$. Für jedes $v =$ $= 1, 2, \ldots$ existiert dann ein $x(h_v) \in N(hv)$ mit $\varphi(x(h_v)) \in \tilde{Q}(d^*)$. Da $\tilde{Q}(d^*)$ kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $\{\varphi(x(h_\mu))\}_{\mu=1}^{\infty}$, deren Grenzwert x^* zu $\tilde{Q}(d^*)$ gehört. In jeder ε-Umgebung von x^* liegen daher unendlich viele Glieder der Folge $\{\varphi(x(h_\mu))\}_{\mu=1}^{\infty}$. Sei $\varphi^{-1}(x^*) = \tilde{x} \in M$. Wegen φ^{-1} stetig, liegen daher in jeder Umgebung von $\tilde{x}$ unendlich viele Punkte der Folge $\{x(h_\mu)\}$. Das steht aber im Widerspruch zur Konstruktion der $x(h_\mu)$. Das Lemma ist damit bewiesen.

Bemerkung. Aus dem eben angegebenen Beweis folgt sofort: Für jedes hinreichend große $h \in E_1$, $h > 0$ existiert ein $d \in E_1$, $d > 0$ mit der Eigenschaft, daß $\varphi^{-1}(Q(d)) \subset N(h)$.

Sei jetzt $\bar{E}_n = E_n \cup \{\infty\}$. Als Umgebungen des Punktes ∞ werden in bekannter Weise alle Mengen angesehen, die den Punkt ∞ und alle Punkte außerhalb einer genügend großen abgeschlossenen Kugel mit dem Koordinatenursprung als Mittelpunkt enthalten. Es ist dann ohne weiteres klar, daß $\tilde{M} = M \cup \{\infty\}$ und $\tilde{M}_{n-1} = M_{n-1} \cup \{\infty\}$ in $\bar{E}_n$ abgeschlossen sind. Die Abbildung

$$\psi(x) = \left\langle \begin{array}{ll} \varphi(x) & \text{für} \quad x \in E_n \\ \infty & \text{für} \quad x = \infty \end{array} \right.$$

ist dann ein Homöomorphismus von $\tilde{M}$ auf $\tilde{M}_{n-1}$. Die Stetigkeit von ψ und ψ^{-1} ergibt sich dabei unmittelbar aus Lemma 1 und der sich daran anschließenden Bemerkung.

Im weiteren wird folgende Lemma benutzt, dessen Beweis unmittelbar klar ist.

Lemma 2. *Es seien R und R^* homöomorphe topologische Räume. Wenn $P \subset R$ den Raum R zerlegt, so zerlegt auch das Bild P^* von P den Raum R^*. Beide Zerlegungen haben dieselbe Anzahl von Komponenten.*

Bildet man jetzt $\bar{E}_n$ homöomorph auf S_n ab, so gehen $\tilde{M}$ und $\tilde{M}_{n-1}$ in zueinander homöomorphe Mengen $\hat{M}$ und $\hat{M}_{n-1}$ über. Nach Lemma 2 zerlegt $\hat{M}_{n-1}$ den Raum S_n in genau zwei Gebiete. Unter Benutzung des Dualitätssatzes von ALEXANDER und PONTRJAGIN [1] folgt sofort, daß auch $\hat{M}$ den Raum S_n in genau zwei Gebiete zerlegt. Wendet man nochmal Lemma 2 an und berücksichtigt die Definition von $\tilde{M}$ und $\tilde{M}_{n-1}$, so ergibt sich folgendes Resultat.

Satz 2. 1°. *Ist $M \subset E_n$, $M = \bar{M}$ homöomorph zu einer abgeschlossenen unbeschränkten einfachen Hyperfläche M_{n-1}, so zerlegt M den E_n in genau zwei Gebiete G_1 und G_2.* 2°. *M ist die gemeinsame Begrenzung von G_1 und G_2.*

Beweis. Es muß nur noch Behauptung 2° bewiesen werden. Nach Satz 1 ist jeder Punkt von M_{n-1} Begrenzungspunkt von M_{n-1} und die Menge M_{n-1} ist gemeinsame Begrenzung der beiden Gebiete, in die sie den E_n zerlegt. Aus dem Satz von der Gebietsinvarianz ([3], S. 346) folgt dann, daß jeder Punkt von M ebenfalls Begrenzungspunkt von M ist. Sei $x \in M$. In jeder n-dimensionalen Umgebung von x liegt dann stets ein Punkt von G_1 und ein Punkt von G_2. Denn würde eine Umgebung $U(x)$ existieren mit o.B.d.A. $U(x) \setminus M \subset G_1$, so würde jede Umgebung des Bildpunktes $\tilde{x}$ von x, $\tilde{x} \in M_{n-1}$, eine Umgebung enthalten, die homöomorph zu E_n ist. Das ist aber nicht möglich. Jeder Punkt von M ist daher Begrenzungspunkt von G_1 und G_2. Die Menge M ist somit gemeinsame Begrenzung von G_1 und G_2.

Es sei jetzt $M_{n-1} = \bar{M}_{n-1}$ eine beschränkte einfache Hyperfläche in E_n. Wie in [2] bewiesen wurde, ist eins der beiden Gebiete, in die der E_n durch M_{n-1} zerlegt wird, beschränkt. Aus Satz 1 folgt daher sofort

Korollar 1. *Jede kompakte einfache Hyperfläche* $M_{n-1} \subset E_n$ *ist eine reguläre Gebietsgrenze in* E_n.

Sei $M \subset E_n$ homöomorph zu einer kompakten einfachen Hyperfläche $M_{n-1} \subset E_n$. Aus Korollar 1 folgt dann unter Benutzung des Dualitätssatzes von Alexander und Pontrjagin [1] unmittelbar der nachstehende Satz.

Satz 3. *Jede Teilmenge des* E_n, *die homöomorph zu einer kompakten einfachen Hyperfläche des* E_n *ist, ist in* E_n *reguläre Gebietsgrenze.*

Literatur

[1] *Александров, П. С.:* Комбинаторная топология. Москва 1947.

[2] *Nožička, F.:* Über einfache Mannigfaltigkeiten im linearen affinen Raum A_n in globaler Auffassung. Czechoslovak Mathematical Journal, No. *4,* 1976.

[3] *Rinow, W.:* Topologie. Berlin 1975.

[4] *Salzwedel, D.:* Über einige Grundbegriffe der nichtlinearen Optimierung. Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik, 1975.

Anschrift des Verfassers: Humbolt Universität zu Berlin, Sektion Mathematik, Unter den Linden, Berlin, DDR.