Otto Mutzbauer

Zerlegbarkeitskriterien für Invarianten torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 29 (1979), No. 3, 337–339

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101615

CZECHOSLOVAK MATHEMATICAL JOURNAL
Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences
V. *29* (*104*), PRAHA 24.9.1979, No 3

ZERLEGBARKEITSKRITERIEN FÜR INVARIANTEN TORSIONSFREIER ABELSCHER GRUPPEN DES RANGES 2

OTTO MUTZBAUER, Würzburg

(Eingegangen am 17. Dezember 1975)

1. EINLEITUNG

Für torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 2, gegeben durch spezielle Invarianten [3; 5], wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für vollständige Zerlegbarkeit angegeben. Die Frage der praktisch-rechnerischen Nachprüfbarkeit der vollständigen Zerlegbarkeit mit Hilfe dieses Kriteriums wird in [4] behandelt. Die Notationen von Fuchs [2] werden verwendet.

2. CHARAKTERISTIKEN

Für p-adische Zahlen r wird die Ordnung $\mathcal{O}_p(r)$, definiert durch $p^{-\mathcal{O}_p(r)} r \in Q_p^*$ Einheit, verwendet. Sei weiter für eine p-adische Zahl r, sofern $\mathcal{O}_p(r) \geqq 0$ ist, $r^{(n)}$ die $(n-1)$-te Partialsumme der p-adischen Standardentwicklung; für $\mathcal{O}_p(r) < 0$ sei $r^{(n)}$ genau diejenige Partialsumme $\bar{r}$ von r, für die gilt: $(\bar{r}^{-1})^{(n)} = (r^{-1})^{(n)}$ bzw. $\bar{r} := \infty$. Speziell soll gelten: $r^{(0)} := 0$, $r^{(\infty)} := r$ und $\infty^{(n)} := \infty$ für natürliches $n > 0$.

Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe G des Ranges 2 mit den unabhängigen Elementen u, v gilt bei Verwendung der Bezeichnungen und Sätze von [2; § 93] für den Q_p^*-Modul $J_p \otimes G$:

$$J_p \otimes G / Q_p^* u \oplus Q_p^* v \cong Z(p^{m_p}) \oplus Z(p^{n_p}) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq m_p \leqq n_p \leqq \infty\,,$$

und mit der abkürzenden Bezeichnung $R_p(m) := p^{-m} Q_p^*$ bzw. $R_p(\infty) := K_p^*$ gilt:

$$J_p \otimes G = R_p(m_p)\,(\alpha_p u + \beta_p v) \oplus R_p(n_p)\,(\gamma_p u + \delta_p v)\,,$$

wobei $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \delta_p \in Q_p^*$ p-adische ganze Zahlen sind mit $\alpha_p \delta_p - \beta_p \gamma_p$ Einheit. Die Gruppe G wird dann bzgl. der Basis u, v durch genau eine „Charakteristik" $\mathcal{M} := \{m_p, n_p, \pi_p \mid p \text{ Primzahl}\}$ beschrieben mit $\pi_p := (\gamma_p \delta_p^{-1})^{(n_p - m_p)} \in K_p^* \cup \{\infty\}$, und man schreibt $G = \langle u, v \mid \mathcal{M} \rangle$.

An der Charakteristik $\mathbb{M}$, die eine Gruppe $G = \langle u, v \mid \mathbb{M} \rangle$ beschreibt läßt sich die vollständige Zerlegbarkeit der Gruppe G ablesen.

Satz. *Die Charakteristik $\mathbb{M} = \{m_p, n_p; \pi_p \mid p \text{ Primzahl}\}$ beschreibt genau dann eine vollständig zerlegbare torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges 2, wenn es rationale Zahlen $r = a/b$ und $s = c/d$ gibt, evtl. ∞, mit ganzen Zahlen a, b, c, d und a prim zu b, c prim zu d, $ad - bc \neq 0$, so daß:*

$$\mathcal{O}_p(ad - bc) \leqq n_p - m_p \quad \textit{für} \quad m_p < \infty$$

und entweder $\pi_p = r^{(n_p - m_p)}$ oder $\pi_p = s^{(n_p - m_p)}$.

Es gilt dann mit den reinen Hüllen

$$G = \langle au + bv \rangle_* \oplus \langle cu + dv \rangle_* ;$$

für $\{h_p \mid p \text{ Primzahl}\} \in \mathfrak{t}(au + bv)$ und $\{k_p \mid p \text{ Primzahl}\} \in \mathfrak{t}(cu + dv)$ weiter:

$$h_p = m_p\,, \quad k_p = n_p \quad \textit{für} \quad \pi_p = r^{(n_p - m_p)} \quad \textit{bzw.} \quad h_p = n_p\,, \quad k_p = m_p$$
$$\textit{für} \quad \pi_p = s^{(n_p - m_p)}\,.$$

Zum Beweis nimmt man $G = \langle u', v' \mid \mathbb{M}' \rangle$ mit $\mathbb{M}' = \{m'_p, n'_p; \pi'_p \mid p \text{ Primzahl}\}$ in zerlegter Form an, d. h. $\pi'_p = 0$ oder $\pi'_p = \infty$ für alle Primzahlen p, und beschreibt G bzgl. der neuen Basis

$$u := \frac{1}{ad - bc}\left(\frac{d}{x}u' - \frac{b}{z}v'\right), \quad v := \frac{1}{ad - bc}\left(-\frac{c}{x}u' + \frac{a}{z}v'\right)$$

mit rationalen Zahlen x und z ungleich 0 und ganzen Zahlen a, b, c, d wie im Satz; wobei u und v genau dann wieder in G liegen, wenn für alle Primzahlen p gilt [3; Lemma 2]:

$$m_p - \mathcal{O}_p(x)\,, \quad n_p - \mathcal{O}_p(z) \geqq \mathcal{O}_p(ad - bc)\,.$$

Durch Variation der Parameter x, z, a, b, c, d erhält man alle Paare u, v unabhängiger Elemente von G.

Bezüglich der neuen Basen u, v von G wird G nach [3; Lemma 3] durch die im Satz angegebenen Charakteristiken $\mathbb{M}$ beschrieben wie man rechnerisch bestätigt.

Ist $G = \langle u, v \mid \mathbb{M} \rangle$ vollständig zerlegbar, dann ist $\mathbb{M}$ aus der zerlegten Charakteristik $\mathbb{M}'$ bzgl. der Basis u', v' von G durch den Übergang auf die Basis u, v entstanden, eine neue Basis von G ist:

$$u'' := au' + bv' = xu\,, \quad v'' := cu' + dv' = zv\,.$$

Offensichtlich ist $G = \langle xu \rangle_* \oplus \langle zv \rangle_* = \langle u \rangle_* \oplus \langle v \rangle_*$. Also ist G bzgl. der neuen

Basis u'', v'' direkt zerlegt. Die rechnerische Durchführung der Rücktransformation nach [3; Lemma 3] liefert die behaupteten Typen der rationalen Summanden.

Korollar. *Eine torsionsfreie abelsche Gruppe des Ranges 2 mit Charakteristik* $\mathbb{M} = \{m_p, n_p; \pi_p \mid p \text{ Primzahl}\}$ *ist direkt unzerlegbar, wenn*

(1) *für eine Primzahl p die p-adische Zahl* π_p *irrational ist, insbesondere ist dann* $m_p \neq n_p = \infty$;

oder

(2) $|\{\pi_p \mid p \text{ Primzahl}, \pi_p \text{ rational}, m_p \neq n_p = \infty\}| > 2$.

Wie dieses bekannte Ergebnis [2; § 88] läßt sich auch [2; 88.3] leicht aus dem Satz folgern. Die Gruppen des Korollars enthalten darüberhinaus auch keine vollständig zerlegbaren Untergruppen von endlichem Index, sind also stark unzerlegbar, vgl. [5; 10.3].

Literatur

[1] *R. A. Beaumont - R. S. Pierce:* Torsion free groups of rank two, Mem. Amer. Math. Soc., no *38* (1961).
[2] *L. Fuchs:* Infinite abelian groups, Academic Press, New York (1970, 1973).
[3] *O. Mutzbauer:* Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, *55* (1976), pp. 195—208.
[4] *O. Mutzbauer:* Klassifizierung torsionsfreier abelscher Gruppen des Ranges 2 (2. Teil), Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, *58* (1978).
[5] *O. Mutzbauer:* Torsionsfreie abelsche Gruppen des Ranges 2, Habilitationsschrift, Würzburg (1977).
[6] *F. Richman:* A class of rank-2 torsion free groups, Studies on Abelian Groups (Paris, 1968), pp. 327—333.

Anschrift des Verfassers: Mathematisches Institut der Universität Würzburg, Am Hubland, 8700 Würzburg, BRD.