

Dietmar W. Dorninger; Dietmar Schweigert
Zur Darstellung von Polynomen auf De Morgan Algebren

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 30 (1980), No. 1, 65–70

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/101655>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1980

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ZUR DARSTELLUNG VON POLYNOMEN AUF DE MORGAN ALGEBREN

DIETMAR DORNINGER, Wien, D. SCHWEIGERT, Kaiserslautern

(Eingegangen an 29. September 1976)

Sei M die Varietät der De Morgan Algebren, $\mathcal{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ die freie De Morgan Algebra mit freiem Erzeugendensystem $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ und $L \in M$. Unter der *Polynomialgebra* $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$ über L in den Unbestimmten x_1, x_2, \dots, x_n verstehen wir das Koprodukt (im Sinne der Kategorien) von L und $\mathcal{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ in M . — Die Elemente von $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$ bezeichnen wir als (*De Morgan*) *Polynome* in den Unbestimmten x_1, x_2, \dots, x_n . (Zur Definition der Polynomialgebra siehe *Lausch-Nöbauer* [6]).

Für die Varietäten der Verbände (Siehe SCHUFF [7]), der distributiven Verbände (Siehe HULE [4] und MITSCH [5]) sowie der distributiven Verbände mit 0 und 1 und der Booleschen Algebren (Vgl. LAUSCH-NÖBAUER [6]) sind Normalformensysteme für die Polynome bekannt.

Im Folgenden geben wir für De Morgan Polynome in n Unbestimmten ein Normalformensystem an.

Dieses Normalformensystem zeigt uns, daß für eine De Morgan Algebra L die Algebra $P_n(L)$ der durch die Polynome in n Unbestimmten vermittelten *Polynomfunktionen* (= algebraische Funktionen im Sinne von GRÄTZER [3]) im allgemeinen nicht isomorph zu $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ist. Gleichwohl erhalten wir durch das Normalformensystem für die Polynome ein „Darstellungssystem“ für die n -stelligen Polynomfunktionen. Mit Hilfe dieses Darstellungssystems bestimmen wir im Falle von vollständigen, unendlich-distributiven De Morgan Algebren L ein Normalformensystem für $P_1(L)$.

Für die verbandstheoretischen Operationen in einer De Morgan Algebra M schreiben wir \cup und \cap , mit $'$ bezeichnen wir den involutorischen Antiautomorphismus von M , und 0, 1 seien die nullären Operationen.

Nun definieren wir: Für ein Element y aus einer De Morgan Algebra M sei $y^0 = 1$ (Einselement von M) und $y^1 = y$. Damit zeigen wir

Satz 1. Sei $L \in \mathbf{M}$ und W der zweielementige Boolesche Verband bestehend aus 0 und 1. Die Menge aller Worte

$$\bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_{2n}) \in W^{2n}} (a_{i_1 i_2 \dots i_{2n}} \cap x_1^{i_1} \cap (x_1')^{i_2} \cap x_2^{i_3} \cap (x_2')^{i_4} \cap \dots \cap x_n^{i_{2n-1}} \cap (x_n')^{i_{2n}})$$

mit $a_{i_1 i_2 \dots i_{2n}} \in L$ und $a_{i_1 i_2 \dots i_{2n}} \geq a_{j_1 j_2 \dots j_{2n}}$, falls in W^{2n} gilt $(i_1, i_2, \dots, i_{2n}) \geq (j_1, j_2, \dots, j_{2n})$ bildet ein Normalformensystem für die Polynome von $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Ferner gilt: Sind $a_{i_1 i_2 \dots i_{2n}}$ bzw. $b_{i_1 i_2 \dots i_{2n}}$ die Koeffizienten in den Normalformen zweier Polynome p und q , so ist $p \geq q$ genau dann, falls $a_{i_1 i_2 \dots i_{2n}} \geq b_{i_1 i_2 \dots i_{2n}}$ ist für alle $(i_1, i_2, \dots, i_{2n}) \in W^{2n}$.

Den Beweis führen wir mittels dreier Hilfssätze.

Hilfssatz 1. $\mathcal{F}[x_1]$ ist genau dann einbettbar in $L[x_1]$, falls $|L| \neq 1$ ist.

Beweis. Wir setzen $x_1 = x$.

Ist $|L| = 1$, so fallen in L das Eins- und Nullelement zusammen, und damit ist $\mathcal{F}[x]$ nicht in $L[x]$ einbettbar.

Sei $|L| \neq 1$. $L[x]$ ist das Koprodukt von (L, φ_L) und $(\mathcal{F}[x], \varphi_{\mathcal{F}})$, wo φ_L die Einbettung von L in $L[x]$ und $\varphi_{\mathcal{F}}$ derjenige Homomorphismus ist, welcher die Einbettung von $\{x\}$ in $L[x]$ fortsetzt. (Siehe [6]). Da $|L| \neq 1$, ist in $L[x]$ $x \neq a$ für jedes $a \in L$. Ferner kann nicht gelten $x = x'$, $x \geq x'$ oder $x \leq x'$, denn alle drei Beziehungen würden die Identität $0 = 1$ nach sich ziehen. Also sind $x, x', x \cup x'$ und $x \cap x'$ paarweise verschieden. — Angenommen, $x \cup x'$ wäre gleich 1 (Gleichbedeutend damit ist $x \cap x' = 0$.) Die Abbildung $\psi_{\mathcal{F}}$ definiert durch $\psi_{\mathcal{F}}(x \cup x') = \psi_{\mathcal{F}}(x) = \psi_{\mathcal{F}}(x') = \psi_{\mathcal{F}}(x \cap x') = \psi_{\mathcal{F}}(0) = 0$ und $\psi_{\mathcal{F}}(1) = 1$ ist ein Homomorphismus von $\mathcal{F}[x]$ in L ; ist ψ_L die identische Abbildung von L , so muß es gemäß der Definition des Koproduktes einen eindeutig bestimmten Homomorphismus ϱ von $L[x]$ in L geben, sodaß gilt $\psi_{\mathcal{F}} = \varrho \varphi_{\mathcal{F}}$ und $\psi_L = \varrho \varphi_L$. Also müßte gelten $\varrho(\varphi_{\mathcal{F}}(x \cup x')) = \varrho(x \cup x') = \varrho(1) = 1$ und $\psi_{\mathcal{F}}(x \cup x') = 0$, was ein Widerspruch ist.

Damit erhalten wir, daß $x, x', x \cup x', x \cap x', 0$ und 1 alle paarweise verschieden sind, w.z.z.w.

Im folgenden nehmen wir stets an, daß $|L| \neq 1$ ist, und betrachten $\mathcal{F}[x_1]$ und L als in $L[x_1]$ eingebettet. (Für $|L| = 1$ ist Satz 1 trivialerweise richtig.)

Hilfssatz 2. Sei $L \in \mathbf{M}$; $a, b \in L$. In $L[x]$ gilt: Aus $x \cup x' \cup a \geq x \cup x' \cup b$ folgt $a \geq b$.

Beweis. Seien $\varphi_L, \varphi_{\mathcal{F}}, \psi_L, \psi_{\mathcal{F}}$ und ϱ so gewählt wie oben, dann gilt: $x \cup x' \cup a \geq x \cup x' \cup b \Rightarrow \varrho(x \cup x' \cup a) \geq \varrho(x \cup x' \cup b) \Rightarrow \varrho(x \cup x') \cup \varrho(a) \geq \varrho(x \cup x') \cup \varrho(b) \Rightarrow \psi_{\mathcal{F}}(x \cup x') \cup \psi_L(a) \geq \psi_{\mathcal{F}}(x \cup x') \cup \psi_L(b) \Rightarrow a \geq b$.

Hilfssatz 3. Sei $L \in \mathbf{M}$. Die Menge \mathbf{n} aller Polynome der Form $(a_1 \cap x \cap x') \cup (a_2 \cap x) \cup (a_3 \cap x') \cup a_4$ mit $a_1 \geq a_2 \cup a_3$ und $a_2 \cap a_3 \geq a_4$ bildet ein Normalformensystem für die Polynome von $L[x]$. Ferner gilt: Sind $(a_1 \cap x \cap x') \cup (a_2 \cap x) \cup (a_3 \cap x') \cup a_4$ und $(b_1 \cap x \cap x') \cup (b_2 \cap x) \cup (b_3 \cap x') \cup b_4$ die Normalformen zweier Polynome p und q , so ist $p \geq q$ genau dann, falls $a_i \geq b_i$ ist für $i = 1, 2, 3$ und 4 .

Beweis. Wegen

$$x = (1 \cap x \cap x') \cup (1 \cap x) \cup (0 \cap x') \cup 0$$

und

$$k = (k \cap x \cap x') \cup (k \cap x) \cup (k \cap x') \cup k$$

sind x und jedes konstante Polynom k aus \mathbf{n} .

Wie man leicht nachrechnet, gilt unter der Voraussetzung $a_1 \geq a_2 \cup a_3$ und $a_2 \cap a_3 \geq a_4$:

$$\begin{aligned} (*) \quad & (a_1 \cap x \cap x') \cup (a_2 \cap x) \cup (a_3 \cap x') \cup a_4 = \\ & = (a_4 \cup x \cup x') \cap (a_3 \cup x) \cap (a_2 \cup x') \cap a_1. \end{aligned}$$

Aus (*) folgt sofort, daß mit p und q auch p' sowie $p \cup q$ und $p \cap q$ zu \mathbf{n} gehören.

Durch vollständige Induktion nach der Wortlänge der Polynome erhält man dann, daß alle Polynome von $L[x]$ unter den Polynomen aus \mathbf{n} vorkommen. (Zur Definition der Wortlänge vgl. [6].)

Angenommen für zwei Polynome $p = (a_1 \cap x \cap x') \cup (a_2 \cap x) \cup (a_3 \cap x') \cup a_4$ und $q = (b_1 \cap x \cap x') \cup (b_2 \cap x) \cup (b_3 \cap x') \cup b_4$ mit $a_1 \geq a_2 \cup a_3$, $a_2 \cap a_3 \geq a_4$ und $b_1 \geq b_2 \cup b_3$, $b_2 \cap b_3 \geq b_4$ gilt $p \geq q$. Dann gilt insbesondere $p(x) \geq q(x)$ für die durch p und q vermittelten Polynomfunktionen $p(x)$ und $q(x)$. $p(1) \geq q(1)$ ergibt $a_2 \geq b_2$ und $p(0) \geq q(0)$ ergibt $a_3 \geq b_3$. Aus $p \geq q$ folgt $p \cup x \cup x' \geq q \cup x \cup x'$, d. h., $x \cup x' \cup a_4 \geq x \cup x' \cup b_4$. Wegen Hilfssatz 2 ist dies gleichbedeutend mit $a_4 \geq b_4$. Weiter sieht man mit Hilfe von (*), daß $p \geq q$, $a_1 \cap x \cap x' \geq b_1 \cap x \cap x'$ nach sich zieht. Durch Anwendung der Operation ' und Hilfssatz 2 ergibt sich daraus $a_1 \geq b_1$.

Da umgekehrt aus $a_i \geq b_i$ für $i = 1, 2, 3$ und 4 folgt, daß $p \geq q$ ist, gilt also $p \geq q$ genau dann, falls $a_i \geq b_i$ ist.

Dies beweist, daß \mathbf{n} ein Normalformensystem ist.

Beweis von Satz 1 durch vollständige Induktion nach n :

Für $n = 1$ ist der Satz gemäß Hilfssatz 3 richtig.

Angenommen, der Satz ist richtig für alle $n \leq N$, dann gilt:

Die Menge der Polynome

$$p = (p_1 \cap x_{N+1} \cap x'_{N+1}) \cup (p_2 \cap x_{N+1} \cap 1) \cup (p_3 \cap 1 \cap x'_{N+1}) \cup (p_4 \cap 1 \cap 1)$$

mit $p_1 \geq p_2 \cup p_3$ und $p_2 \cap p_3 \geq p_4$, wobei $p_k \in L[x_1, x_2, \dots, x_N]$ ist für $k =$

$= 1, 2, 3, 4$, bildet ein Normalformensystem für $(L[x_1, x_2, \dots, x_N])[x_{N+1}]$, und die Polynome

$$\bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_{2N}) \in W^{2N}} (a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}} \cap x_1^{i_1} \cap (x'_1)^{i_2} \cap x_2^{i_3} \cap (x'_2)^{i_4} \cap \dots \cap x_N^{i_{2N-1}} \cap (x'_N)^{i_{2N}})$$

mit $a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}} \geq a_{j_1 j_2 \dots j_{2N}}$, falls $(i_1, i_2, \dots, i_{2N}) \geq (j_1, j_2, \dots, j_{2N})$ ist, sind ein Normalformensystem für $L[x_1, x_2, \dots, x_N]$. Sind $a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}}^{(k)}$ für $k = 1, 2, 3$ und 4 die Koeffizienten von p_k in diesem Normalformensystem, so gilt nach Induktionsvoraussetzung, daß für alle $(i_1, i_2, \dots, i_{2N}) \in W^{2N}$

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}}^{(1)} \geq a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}}^{(r)} \quad \text{und} \quad a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}}^{(r)} \geq a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}}^{(4)}$$

ist für $r = 2$ und 3 . Definieren wir nun

$$\begin{aligned} a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}}^{(1)} &= a_{i_1 i_2 \dots i_{2N} 1 1}, & a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}}^{(2)} &= a_{i_1 i_2 \dots i_{2N} 1 0}, \\ a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}}^{(3)} &= a_{i_1 i_2 \dots i_{2N} 0 1}, & a_{i_1 i_2 \dots i_{2N}}^{(4)} &= a_{i_1 i_2 \dots i_{2N} 0 0}, \end{aligned}$$

so gilt also, daß $a_{i_1 i_2 \dots i_{2N} i_{2N+1} i_{2N+2}} \geq a_{j_1 j_2 \dots j_{2N} j_{2N+1} j_{2N+2}}$ ist, falls in W^{2N+2} $(i_1, i_2, \dots, i_{2N+2}) \geq (j_1, j_2, \dots, j_{2N+2})$. Setzen wir in

$$p = (p_1 \cap x_{N+1} \cap x'_{N+1}) \cup (p_2 \cap x_{N+1} \cap 1) \cup (p_3 \cap 1 \cap x'_{N+1}) \cup (p_4 \cap 1 \cap 1)$$

die Normalformen von p_1, p_2, p_3 und p_4 ein und formen nach dem Distributivgesetz um, so erhalten wir

$$p = \bigcup_{(i_1, i_2, \dots, i_{2N+2}) \in W^{2N+2}} (a_{i_1 i_2 \dots i_{2N+2}} \cap x_1^{i_1} \cap (x'_1)^{i_2} \cap x_2^{i_3} \cap (x'_2)^{i_4} \cap \dots \cap x_N^{i_{2N+1}} \cap (x'_N)^{i_{2N+2}})$$

mit $a_{i_1 i_2 \dots i_{2N+2}} \geq a_{j_1 j_2 \dots j_{2N+2}}$, falls $(i_1, i_2, \dots, i_{2N+2}) \geq (j_1, j_2, \dots, j_{2N+2})$ ist in W^{2N+2} .

Ist q ein weiteres Polynom aus $(L[x_1, x_2, \dots, x_N])[x_{N+1}]$ und ist $(q_1 \cap x_{N+1} \cap x'_{N+1}) \cup (q_2 \cap x_{N+1} \cap 1) \cup (q_3 \cap 1 \cap x'_{N+1}) \cup (q_4 \cap 1 \cap 1)$ seine Normaldarstellung in $(L[x_1, x_2, \dots, x_N])[x_{N+1}]$, so muß im Falle $p \geq q$ gemäß Hilfssatz 3 (bzw. Induktionsvoraussetzung) gelten $p_k \geq q_k$ für $k = 1, 2, 3$ und 4 .

Sind $b_{i_1 i_2 \dots i_{2N} 1 1}$, $b_{i_1 i_2 \dots i_{2N} 1 0}$, $b_{i_1 i_2 \dots i_{2N} 0 1}$, bzw. $b_{i_1 i_2 \dots i_{2N} 0 0}$ die auf dieselbe Weise wie oben definierten Koeffizienten in den Normaldarstellungen der Polynome q_1, q_2, q_3 bzw. q_4 , so muß damit und nach Induktionsvoraussetzung

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{2N} i_{2N+1} i_{2N+2}} \geq b_{i_1 i_2 \dots i_{2N} i_{2N+1} i_{2N+2}}$$
 sein für alle $(i_1, i_2, \dots, i_{2N+2}) \in W^{2N+2}$.

Berücksichtigen wir, daß es einen $L \cup \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ festhaltenden Isomorphismus von $(L[x_1, x_2, \dots, x_N])[x_{N+1}]$ auf $L[x_1, x_2, \dots, x_{N+1}]$ gibt (Vgl. [6]), so ist damit die Behauptung von Satz 1 mit $n = N + 1$ gezeigt.

Bemerkung 1. Ist L die zweielementige De Morgan Algebra, so ist die Polynomalgebra $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$ isomorph zur freien De Morgan Algebra $\mathcal{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ und das gefundene Normalformensystem ein Normalformensystem für die Elemente der freien Algebra.

Bemerkung 2. Sei $L \in \mathcal{M}$. Die Algebra $P_n(L)$ der n -stelligen Polynomfunktionen über L ist im allgemeinen nicht isomorph zur Polynomalgebra $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Dies zeigt uns etwa der

Satz 2. Ist L eine vollständige unendlich-distributive De Morgan Algebra und $s = \bigcup_{x \in L} (x \cap x')$, so bildet die Menge \mathfrak{n} der Funktionen $p(x) = (a \cap x \cap x') \cup (b \cap x) \cup (c \cap x') \cup d$ mit b, c beliebig aus L und $a \in \{\alpha \cap s \mid \alpha \in L, \alpha \geq b \cup c\}$, $d \in \{\delta \cup (s' \cap b \cap c) \mid \delta \in L, b \cap c \geq \delta\}$ ein Normalformensystem für die einstelligen Polynomfunktionen von L .

Beweis. Jede Polynomfunktion ist aus \mathfrak{n} , denn gemäß Hilfssatz 3 erhält man alle Funktionen aus $P_1(L)$, indem man alle Polynome $p(x) = (\alpha \cap x \cap x') \cup (b \cap x) \cup (c \cap x') \cup \delta$ mit $\alpha \geq b \cup c$, $b \cap c \geq \delta$ bildet, und wegen (*) gilt (mit = im Sinne von Gleichheit von Funktionen in der Variablen x):

$$\begin{aligned}
 & (\alpha \cap s \cap x \cap x') \cup (b \cap x) \cup (c \cap x') \cup \delta \cup (s' \cap b \cap c) = \\
 & = ((\alpha \cap x \cap x') \cup (b \cap x) \cup (c \cap x') \cup \delta) \cup (s' \cap b \cap c) = \\
 & = ((\delta \cup x \cup x') \cap (c \cup x) \cap (b \cup x') \cap \alpha) \cup (s' \cap b \cap c) = \\
 & = ((\delta \cup x \cup x' \cup (s' \cap b \cap c)) \cap (c \cup (s' \cap b \cap c) \cup x) \cap \\
 & \quad \cap (b \cup (s' \cap b \cap c) \cup x') \cap (\alpha \cup (s' \cap b \cap c))) = \\
 & = (\delta \cup x \cup x') \cap (c \cup x) \cap (b \cup x') \cap \alpha = p(x).
 \end{aligned}$$

Angenommen für zwei Funktionen $p(x), q(x) \in P_1(L)$ gilt $p(x) = q(x)$, dann erhalten wir, wenn $(a \cap x \cap x') \cup (b \cap x) \cup (c \cap x') \cup d$ und $(a_1 \cap x \cap x') \cup (b_1 \cap x) \cup (c_1 \cap x') \cup d_1$ die in Satz 2 angegebenen „Normaldarstellungen“ von $p(x)$ bzw. $q(x)$ sind:

Aus $p(1) = q(1)$ und $p(0) = q(0)$ folgt $b = b_1$ und $c = c_1$; $p(x) \cup x \cup x' = q(x) \cup x \cup x'$ ergibt $d \cup x \cup x' = d_1 \cup x \cup x' \Rightarrow \bigcap_{x \in L} (d \cup x \cup x') = \bigcap_{x \in L} (d_1 \cup x \cup x')$ $\Rightarrow d \cup s' = d_1 \cup s' \Rightarrow (d \cup s') \cap b \cap c = (d_1 \cup s') \cap b \cap c \Rightarrow d \cup (s' \cap b \cap c) = d_1 \cup (s' \cap b \cap c) \Rightarrow d = d_1$, denn $d, d_1 \geq (s' \cap b \cap c)$.

$p(x) \cap x \cap x' = q(x) \cap x \cap x'$ ergibt $(x \cap x') \cap (a \cup b \cup c) = (x \cap x') \cap (a_1 \cup b \cup c) \Rightarrow (a \cup b \cup c) \cap s = (a_1 \cup b \cup c) \cap s \Rightarrow a \cup ((b \cup c) \cap s) = a_1 \cup ((b \cup c) \cap s) \Rightarrow a = a_1$, da $a, a_1 \geq (b \cup c) \cap s$ sind.

Damit ist gezeigt, daß \mathfrak{n} ein Normalformensystem ist.

Satz 2 gestattet, sukzessive die n -stelligen Polynomfunktionen einer unendlich-distributiven vollständigen De Morgan Algebra L zu bestimmen, denn $P_n(L)$ ist isomorph zu $P_1(P_{n-1}(L))$. (Vgl. [1].)

Literaturhinweise

- [1] *Dorninger D.* u. *J. Wiesenbauer*: Anzahlsätze für Polynomfunktionen auf Verbänden. *Rend. Inst. mat. Univ. Trieste*, 8 (1976), 135—141.
- [2] *Eigenthaler G.*: On Polynomial Algebras. *Coll. Math. Soc. J. Bolayi*, 17. *Coutr. to Universal Algebra, Szeged* (1975), 83—99.
- [3] *Grätzer G.*: *Universal Algebra*. Van Nostrand, Toronto, London, Melbourne (1968).
- [4] *Hule H.*: Polynomial Normal Forms and the Embedding of Polynomial Algebras. *Coll. Math. Soc. J. Bolayi*, 17. *Coutr. to Universal Algebra, Szeged* (1975), 179—187.
- [5] *Mitsch H.*: Über Polynome und Polynomfunktionen auf Verbänden. *Monatsh. Math.* 74 (1970) 239—243.
- [6] *Lausch H.* u. *W. Nöbauer*: *Algebra of Polynomials*. North Holland Pub. Comp, Amsterdam, London (1973).
- [7] *Schuff H. K.*: Zur Darstellung von Polynomen auf Verbänden. *Math. Nachr.* 11 (1954) 1—4.

Anschrift der Verfasser: D. Dörninger, Technische Universität Wien, A-1040 Wien, Karlsplatz 13, Österreich; D. Schweigert, Universität Kaiserslautern, D-6750 Kaiserslautern, Pfaffenbergerstrasse 95, BRD.