František Machala
Epimorphismen von lokalen Ternärringen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 33 (1983), No. 1, 70–75

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101856

Czechoslovak Mathematical Journal, 33 (108) 1983, Praha

EPIMORPHISMEN VON LOKALEN TERNÄRRINGEN

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 11. October 1980)

Affine und projektive Ebenen werden algebraisch durch sog. Ternärkörper beschrieben, die eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Körper sind. Ternärringe stellen dann eine solche Verallgemeinerung von Ternärkörper dar, daß sich jeden Ring mit Einselement als Ternärring auffassen läßt. In [4] definierte man Ideale von Ternärringen und es wurde gezeigt, daß diese Ideale ähnliche strukturelle Eigenschaften wie die Ideale in Ringen besitzen. Mit den vollständigen Idealen definierte man lokale Ternärringe, die für algebraische Beschreibung der sog. Klingenbergschen Ebenen in [5], [6] und in etwas anderer Form in [1], [2] verwandt wurden. Lokale Ternärringe stellen dabei eine Verallgemeinerung von lokalen Ringen dar.

Die vorliegende Arbeit knüpft an [4] an. Hier werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür festgelegt, damit das Bild eines lokalen Ternärringes im Epimorphismus wieder ein lokaler Ternärring ist. Dieses Ergebnis läßt sich z.B. zur algebraischen Beschreibung von Epimorphismen affiner Klingenbergscher Ebenen benutzen.

Definition 1. Es sei $T = (R, t)$ ein Ternärring ([4], Def. 1). Ein Element $a \in R$ heißt *links invertierbar* bzw. *rechts invertierbar*, wenn es ein Element $b \in R$ bzw. $c \in R$ mit $t(b, a, 0) = 1$ bzw. $t(a, c, 0) = 1$ gibt. Ist a weder links noch rechts invertierbar, dann heißt es nichtinvertierbar.

Lemma 1. *Ist J ein Ideal des Ternärringes $T = (R, t)$ mit $J \neq R$* ([4], Def. 4), *dann ist jedes Element von J nichtinvertierbar.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $a \in J$ z.B. links invertierbar ist, d.h. es gibt ein $b \in R$ mit $t(b, a, 0) = 1$. Nach [4], Folgerung 1 der Definition 4 folgt daraus $1 \in J$, denn 0, $a \in J$. Für ein beliebiges Element $x \in R$ gilt dann $t(x, 1, 0) = x$ und $1, 0 \in J$ impliziert $x \in J$, also $J = R$. Dies ist aber ein Widerspruch.

Lemma 2. *Es sei $T = (R, t)$ ein Ternärring. Ist N ein vollständiges Ideal von T* ([4], Def. 6), *so ist jedes Element $a \in R \setminus N$ links und zugleich rechts invertierbar. Bildet die Menge J aller nichtinvertierbaren Elemente von T ein Ideal, dann ist J das einzige maximale Ideal von T.*

Beweis. 1. Es sei N ein vollständiges Ideal von $T = (R, t)$. Wegen $R \neq N$ ist nach Lemma 1 jedes Element von N nichtinvertierbar. Es sei $a \notin N$. Ist $\bar{T} = (R/N, \bar{t})$ der zu N gehörige Restklassen-Ternärring mit den Elementen $\bar{a}, \bar{b}, \ldots$ ([4], Def. 5), dann gilt $\bar{a} \neq \bar{0}$. Nach $K_3'(a)$ von [4], Definition 6 gibt es zu a, 0, 0, 1 genau ein x mit $t(x, a, 0) = t(x, 0, 1) = 1$ und a ist links invertierbar. Analog gibt es nach [4], $K_4'(a)$ genau ein Paar $(x, y) \in R \times R$ mit $1 = t(a, x, y)$, $0 = t(0, x, y)$. Da zugleich $t(0, x, 0) = 0$ gilt, ergibt sich nach [4], K_2 $y = 0$ und folglich $t(a, x, 0) = 1$. Dies bedeutet, daß a auch rechts invertierbar ist.

2. Es sei J ein Ideal von $T = (R, t)$, das genau alle nichtinvertierbaren Elemente enthält. Wegen $1 \notin J$ ist $J \neq R$ und nach Lemma 1 ist jedes Ideal von T in J enthalten. Also J bildet das einzige maximale Ideal von T.

Bemerkung 1. Es szi $\mathscr{R} = (R, +, \cdot)$ ein lokaler Ring. In $\mathscr{R}$ gibt es dann genau ein maximales Ideal N und N enthält alle nichtinvertierbaren Elemente von $\mathscr{R}$ (siehe z.B. [3], § 3.7). Setzt man $t(a, b, c) = ab + c$ für alle $a, b, c \in R$, dann ist $T = (R, t)$ ein Ternärring. Nach Beispiel 2 von [4], S. 566 bildet N ein vollständiges Ideal von T und T ist daher ein lokaler Ternärring ([4], Def. 8). N ist zugleich genau ein maximales Ideal von T ([4], Bem. 3) und enthält alle nichtinvertierbaren Elemente von T. Im folgenden Beispiel wird ein Ternärring T mit genau einem maximalen Ideal N konstruiert, so daß ein nichtinvertierbares Element $a \in T$ mit $a \notin N$ existiert. Dann ist N kein vollständiges Ideal von T.

Beispiel. Auf der Menge $R = \{0, 1, 2, 3\}$ erklären wir zwei binäre Operationen $+$ und $\cdot$ durch folgende Tabellen:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	2	3

$(R, +)$ ist zu der additiven Gruppe Z_4 isomorph. Setzen wir $t(a, b, c) := (ab) + c$ für alle $a, b, c \in R$, dann ist $T = (R, t)$ ein Ternärring. Es läßt sich zeigen, daß $N = \{0, 2\}$ ein Ideal von T ist. N ist genau ein nichttriviales Ideal von T: Es sei J ein Ideal von T. Aus $1 \in J$ folgt offenbar $J = R$. Es sei $3 \in J$. Dann ist $t(1, 3, 3) = 3 + 3 = 2$ und nach [4], Folgerung (1) der Definition 4 gilt $2 \in J$. Ferner ergibt sich $t(1, 2, 3) = 2 + 3 = 1$ und aus $2, 3 \in J$ folgt $1 \in J$, also $J = R$. Somit ist N genau ein maximales Ideal von T. Dabei gilt $3 \notin N$ und 3 ist ein nichtinvertierbares Element von T.

Satz 1. *Es sei φ ein Epimorphismus des Ternärringes $T_1 = (R_1, t_1)$ auf den Ternärring $T_2 = (R_2, t_2)$* ([4], Def. 3) *und sei I der Kern von φ, also $I = \{x \in R_1 \mid x^\varphi = 0'\}$. Ist J ein Ideal von T_1 mit $J \subset I$ bzw. $I \subset J$, dann bildet $J^\varphi = \{x' \in R_2 \mid \exists x \in J_1, x^\varphi = x'\}$ ein Ideal von T_2.*

Beweis. Gilt $J \subset I$, dann ist $J^\varphi = \{0'\}$ und nach [4], Satz 2 ist J^φ ein Ideal von T_2. Ferner sei $I \subset J$. Wir wollen zeigen, daß J^φ die Forderungen (i)–(iv) der Definition 4, [4] erfüllt.

Ad (i). Nach Beweis des Satzes 6, [4] ist $0^\varphi = 0'$ und wegen $0 \in J$ gilt $0' \in J^\varphi$.

Ad (ii). Es seien $a', b' \in R_2$, $r' \in J^\varphi$ mit $b' = t_2(1', a', r')$. Dann gibt es $a, b \in R_1$ und $r \in J$ mit $a^\varphi = a'$, $b^\varphi = b'$ und $r^\varphi = r'$. Setzen wir $d = t_1(1, a, r)$, dann gibt es nach (ii) ein $r_1 \in J$ mit $a = t_1(1, d, r_1)$. Da φ ein Epimorphismus ist, erhält man $d^\varphi = [t_1(1, a, r)]^\varphi = t_2(1', a', r') = b'$ und $a^\varphi = a' = t_2(1', d^\varphi, r_1^\varphi) = t_2(1', b', r_1^\varphi)$, wo $r_1^\varphi \in J^\varphi$ ist.

Ad (iii). Es seien $a', b', c' \in R_2$ und $r_1', r_2', r_3' \in J^\varphi$. Es gibt $a, b, c \in R_1$ und $r_1, r_2, r_3 \in J$ mit $a^\varphi = a'$, $b^\varphi = b'$, $c^\varphi = c'$ und $r_1^\varphi = r_1'$, $r_2^\varphi = r_2'$, $r_3^\varphi = r_3'$. Nach (iii) gibt es ein $r \in J$ mit $t_1(a \oplus r_1, b \oplus r_2, c \oplus r_3) = t_1(a, b, c) \oplus r$. Dabei ist $a \oplus r_1 = t_1(1, a, r_1)$ und $(a \oplus r_1)^\varphi = t_2(1', a', r_1') = a' \oplus r_1'$. Analog läßt sich $(b \oplus r_2)^\varphi = b' \oplus r_2'$ und $(c \oplus r_3)^\varphi = c' \oplus r_3'$ beweisen. Setzen wir $d = t(a, b, c)$, dann $(d \oplus r)^\varphi = d^\varphi \oplus r^\varphi = t_2(a', b', c') \oplus r^\varphi$, wo $r^\varphi \in J^\varphi$ ist. Somit erhalten wir $(t_1(a \oplus r_1,\ b \oplus r_2,\ c \oplus r_3))^\varphi = t_2((a \oplus r_1)^\varphi,\ (b \oplus r_2)^\varphi,\ (c \oplus r_3)^\varphi) = t_2(a' \oplus r_1', b' \oplus r_2', c' \oplus r_3') = (t_1(a, b, c) \oplus r)^\varphi = t_2(a', b', c') \oplus r^\varphi$.

Ad (iv). Es seien $a', b', x', y' \in R_2$ und $r' \in J^\varphi$ mit $t_2(a', b', y') = t_2(a', b', x') \oplus r'$. Es gibt $a, b, x, y \in R_1$ und $r \in J$ mit $a^\varphi = a'$, $b^\varphi = b'$, $x^\varphi = x'$, $y^\varphi = y'$ und $r^\varphi = r'$. Dann gilt $[t_1(a, b, y)]^\varphi = t_2(a', b', y')$ und $[t_1(a, b, x) \oplus r]^\varphi = t_2(a', b', x') \oplus r'$. Wegen $[t_1(a, b, y)]^\varphi = [t_1(a, b, x) \oplus r]^\varphi$ gibt es ein $k \in I$ mit $t_1(a, b, y) = (t_1(a, b, x) \oplus r) \oplus k$. Aus $I \subset J$ folgt $k \in J$ und nach Folgerung (3) des Definition 4, [4] gibt es ein $s \in J$ mit $(t_1(a, b, x) \oplus r) \oplus k = t_1(a, b, x) \oplus s$, folglich $t_1(a, b, y) = t_1(a, b, x) \oplus s$. Nach (iv) gibt es daher ein $p \in J$ mit $y = x \oplus p$, woraus $y^\varphi = x^\varphi \oplus p^\varphi = y' = x' \oplus p^\varphi$ mit $p^\varphi \in J^\varphi$ folgt.

Lemma 3. *Es sei N ein Ideal des Ternärringes $T_1 = (R_1, t_1)$ mit $N \neq R_1$, welches alle nichtinvertierbare Elemente von T_1 enthält und sei φ ein Epimorphismus von T_1 auf einen Ternärring $T_2 = (R_2, t_2)$. Dann ist N^φ genau ein maximales Ideal von T_2.*

Beweis. Nach Lemma 1 und 2 stellt N genau ein maximales Ideal von T_1 dar. Ist J der Kern von φ, dann $J \subset N$ und N^φ ist ein Ideal von T_2. Zu jedem Element $a' \in R_2 \setminus N^\varphi$ gibt es ein $a \in R_1 \setminus N$ mit $a^\varphi = a'$ und a ist rechts oder links invertierbar. Wir nehmen z.B. an, daß ein $b \in R_1$ mit $t_1(b, a, 0) = 1$ existiert. Dann gilt $t_2(b^\varphi, a', 0') = 1'$ und a' ist links invertierbar. Also N^φ enthält alle nicht invertierbaren Elemente. Es sei $1' \in N^\varphi$. Dann gibt es ein $x \in N$ mit $x^\varphi = 1' = 1^\varphi$ und mithin gibt es ein $r \in J$ mit $1 = x \oplus r = t_1(1, x, r)$. Wegen $J \subset N$ gilt $r \in N$ und nach Folgerung (1) der Definition 4, [4] ist $1 \in N$. Dies ist aber ein Widerspruch. Mithin erhalten wir $1' \notin N^\varphi$ und $N^\varphi \neq R_2$. Nach Lemma 1 enthält N^φ nur nichtinvertierbare Elemente und nach Lemma 2 stellt N^φ genau ein maximales Ideal von T_2 dar.

Bemerkung 2. Es seien $T_1 = (R_1, t_1)$, $T_2 = (R_2, t_2)$ lokale Ternärringe mit vollständigen Idealen N_1, N_2 und $\varphi : T_1 \to T_2$ sei ein Epimorphismus. Da N_1 die Menge aller nichtinvertierbaren Elemente von T_1 ist, bildet N_1^φ genau ein maximales Ideal von T_2. Da zugleich auch N_2 genau ein maximales Ideal von T_2 ist, gilt $N_1^\varphi = N_2$. Es seien $\mathscr{R}_1 = (R_1, +, \cdot)$ ein lokaler Ring mit maximalen Ideal N, $\mathscr{R}_2 = (R_2, +, \cdot)$ ein Ring und $\varphi : \mathscr{R}_1 \to \mathscr{R}_2$ sei ein Epimorphismus. Erklären wir nach Bemerkung 1 die zu $\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2$ gehörigen Ternärringe $T_1 = (R_1, t_1)$, $T_2 = (R_2, t_2)$, dann ist φ ein Epimorphismus von T_1 auf T_2, weil $[t_1(a, b, c)]^\varphi = (ab + c)^\varphi = a^\varphi b^\varphi + c^\varphi = t_2(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi)$ gilt. N stellt ein vollständiges Ideal von T_1 dar. Nach Lemma 3 ist N^φ genau ein maximales Ideal von T_2. Nach [4], Folgerung (1) der Definition 4 ist N^φ auch ein Ideal von $\mathscr{R}_2$. N^φ ist zugleich genau ein maximales Ideal von $\mathscr{R}_2$ und $\mathscr{R}_2$ bildet einen lokalen Ring.

Lemma 4. *Es sei φ ein Epimorphismus des Ternärringes $T_1 = (R_1, t_1)$ auf den Ternärring $T_2 = (R_2, t_2)$ mit dem Kern J. Ist N ein Ideal von T_1 mit $J \subset N$, dann ist $\psi : \bar{x} \to \bar{x}_\varphi$ $\forall x \in R_1$ ein Isomorphismus der Restklassen-Ternärringe $\bar{T}_1 = (R_1/N, \bar{t}_1)$ und $\bar{T}_2 = (R_2/N^\varphi, \bar{t}_2)$, wo $\bar{x}_\varphi$ die durch das Element x^φ bestimmte Restklasse von $\bar{T}_2$ ist.*

Beweis. Zuerst beweisen wir, daß ψ wirklich eine Abbildung ist. Gilt $\bar{a} = \bar{b}$, dann gibt es ein $r \in N$ mit $b = t_1(1, a, r)$, woraus $b^\varphi = t_2(1^\varphi, a^\varphi, r^\varphi)$ mit $1^\varphi = 1'$ und $r^\varphi \in N^\varphi$ folgt. Dies aber bedeutet $\bar{a}_\varphi = \bar{b}_\varphi$ also $\bar{a}^\psi = \bar{b}^\psi$. Ferner beweisen wir, daß ψ injektiv ist: Es sei $\bar{x}^\psi = \bar{y}^\psi$, also $\bar{x}_\varphi = \bar{y}_\varphi$. Es gibt ein $r' \in N^\varphi$ mit $y^\varphi = x^\varphi \oplus r'$ und gleichzeitig gibt es ein $r \in N$ mit $r^\varphi = r'$. Dann gilt $y^\varphi = x^\varphi \oplus r^\varphi = t_2(1', x^\varphi, r^\varphi) = [t_1(1, x, r)]^\varphi = (x \oplus r)^\varphi$ und mithin gibt es ein $s \in J$ mit $y = (x \oplus r) \oplus s$. Wegen $J \subset N$ ist $s \in N$ und nach Folgerung (3) der Definition 4, [4] gibt es ein $p \in N$, so daß $y = x \oplus p$ gilt. Hieraus folgt $\bar{y} = \bar{x}$. Nach der Definition der Ternäroperationen $\bar{t}_1$ und $\bar{t}_2$ ergibt sich $[\bar{t}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})]^\psi = \overline{(t_1(a, b, c))}_\varphi = \bar{t}_2(\bar{a}_\varphi, \bar{b}_\varphi, \bar{c}_\varphi) = \bar{t}_2(\bar{a}^\psi, \bar{b}^\psi, \bar{c}^\psi)$.

Definition 2. Es seien $T = (R, t)$ ein lokaler Ternärring mit vollständigen Ideal N und $\bar{T} = (R/N, \bar{t})$ der zu N gehörige Restklassen-Ternärring. Ferner sei $J \neq R$ ein Ideal von T und $\tilde{T} = (R/J, \tilde{t})$ der zu J gehörige Restklassen-Ternärring. Das Ideal J heißt *fastvollständig*, wenn folgendes gilt:

(J1) Sind $m, d, n, e, m', d', n', e'$ Elemente von R mit $\bar{m} \neq \bar{n}$, $\tilde{m}' = \tilde{m}$, $\tilde{d}' = \tilde{d}$, $\tilde{n}' = \tilde{n}$, $\tilde{e}' = \tilde{e}$ und gilt $t(x, m, d) = t(x, n, e)$, $t(x', m', d') = t(x', n', e')$, dann ist $\tilde{x} = \tilde{x}'$.

(J2) Sind $a, b, c, d, a', b', c', d'$ Elemente von R mit $\bar{a} \neq \bar{c}$, $\tilde{a}' = \tilde{a}$, $\tilde{b}' = \tilde{b}$, $\tilde{c}' = \tilde{c}$, $\tilde{d}' = \tilde{d}$ und gilt $b = t(a, m, e)$, $d = t(c, m, e)$, $b' = t(a', m', e')$, $d' = t(c', m', e')$, dann ist $\tilde{m}' = \tilde{m}$ und $\tilde{e}' = \tilde{e}$.

Bemerkung 3. Nach [4], Definition 6 ist jedes vollständiges Ideal eines Ternärringes zugleich fastvollständig.

Satz 2. *Es seien $T_1 = (R_1, t_1)$ ein lokaler Ternärring, $T_2 = (R_2, t_2)$ ein Ternärring und $\varphi : T_1 \to T_2$ ein Epimorphismus mit dem Kern J. Das Ideal J ist fastvollständig genau dann, wenn T_2 lokal ist.*

Beweis. Bezeichnet man mit $\tilde{T} = (R_1/J, \tilde{t})$ den zu J gehörigen Restklassen-Ternärring, dann $a^\varphi = b^\varphi \Leftrightarrow \tilde{a} = \tilde{b}$ ([4], Beweis zum Satz 6). Es sei N_1 das vollständige Ideal von T_1 und $\bar{T} = (R_1/N, \bar{t})$ der zugehörige Restklassen-Ternärring. Gilt $\tilde{a} = \tilde{b}$, dann gibt es ein $r \in J$ mit $b = t_1(1, a, r)$. Wegen $J \subset N$ ergibt sich $r \in N$ und folglich $\bar{a} = \bar{b}$. Setzen wir $N_1^\varphi = N_2$ und $\bar{T}_2 = (R_2/N_2, \bar{t}_2)$, so gilt nach Lemma 4 $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}_\varphi = \bar{b}_\varphi$.

1. Es sei T_2 lokal. Nach Bemerkung 2 ist N_2 das vollständige Ideal von T_2. Wir beweisen, daß J fastvollständig ist.

Ad (J1). Es seien $m, d, n, e, m', d', n', e'$ Elemente von R_1, welche dien Forderungen von (J1) erfüllen. Dann gilt $\bar{m}_\varphi \neq \bar{n}_\varphi$, $m'^\varphi = m^\varphi$, $d'^\varphi = d^\varphi$, $n'^\varphi = n^\varphi$, $e'^\varphi = e^\varphi$ und $t_2(x^\varphi, m^\varphi, d^\varphi) = t_2(x^\varphi, n^\varphi, e^\varphi)$, $t_2(x'^\varphi, m^\varphi, d^\varphi) = t_2(x'^\varphi, n^\varphi, e^\varphi)$. Da N_2 vollständig ist, erhalten wir nach $K_3'(a)$ $x'^\varphi = x^\varphi$, also $\tilde{x}' = \tilde{x}$.

Ad (J2) Es seien $a, b, c, d, a', b', c', d'$ Elemente von R_1, welche den Forderungen von (J2) genügen. Dann gilt $\bar{a}_\varphi \neq \bar{c}_\varphi$, $a'^\varphi = a^\varphi$, $b'^\varphi = b^\varphi$, $c'^\varphi = c^\varphi$, $d'^\varphi = d^\varphi$ und $b^\varphi = t_2(a^\varphi, m^\varphi, e^\varphi)$, $d^\varphi = t_2(c^\varphi, m^\varphi, e^\varphi)$, $b^\varphi = t_2(a^\varphi, m'^\varphi, e'^\varphi)$, $d^\varphi = t_2(c^\varphi, m'^\varphi, e'^\varphi)$. Nach $K_4'(a)$ erhalten wir $m^\varphi = m'^\varphi$, $e^\varphi = e'^\varphi$, also $\tilde{m} = \tilde{m}'$, $\tilde{e} = \tilde{e}'$.

2. Es sei das Ideal J fastvollständig. Wir möchten beweisen, daß N_2 ein vollständiges Ideal von T_2 im Sinne der Definition 6 von [4] ist.

Ad $K_3'(a)$ Es seien $a', b', c', d' \in R_2$ mit $\bar{a}' \neq \bar{c}'$. Wir wählen Elemente $a, b, c, d \in R_1$ mit $a^\varphi = a'$, $b^\varphi = b'$, $c^\varphi = c'$, $d^\varphi = d'$. Dann gilt $\bar{a}' \neq \bar{c}' \Rightarrow \bar{a}_\varphi \neq \bar{c}_\varphi \Rightarrow \bar{a} \neq \bar{c}$ und es gibt daher ein $x \in R_1$ mit $t_1(x, a, b) = t_1(x, c, d)$, woraus $t_2(x^\varphi, a', b') = t_2(x^\varphi, c', d')$ folgt. Es sei $y' \in R_2$ ein anderes Element für welches $t_2(y', a', b') = t_2(y', c', d')$ gilt. Wählen wir ein $y \in R_1$ mit $y^\varphi = y'$, dann gibt es nach [4], K_2 ein $m \in R_1$ mit $t_1(y, a, b) = t_1(y, c, m)$ und unter Anwendung von φ erhalten wir $t_2(y', a', b') = t_2(y', c', m^\varphi) = t_2(y', c', d')$, also $m^\varphi = d' = d^\varphi$. Wegen $t_1(x, a, b) = t_1(x, c, d)$, $t_1(y, a, b) = t_1(y, c, m)$, $\bar{a} \neq \bar{c}$ und $\tilde{m} = \tilde{d}$ ergibt sich nach (J1) $\tilde{x} = \tilde{y}$, also $x^\varphi = y^\varphi = y'$.

Ad $K_3'(b)$ Es sei $\bar{t}_2(\bar{x}', \bar{a}', \bar{b}') = \bar{t}_2(\bar{x}', \bar{c}', \bar{d}')$, $\bar{t}_2(\bar{y}', \bar{a}', \bar{b}') = \bar{t}_2(\bar{y}', \bar{c}', \bar{d}')$ mit $\bar{a}' \neq \bar{c}'$. Wir wählen $a, b, c, d, x, y \in R_1$ mit $a^\varphi = a'$, $b^\varphi = b'$, $c^\varphi = c'$, $d^\varphi = d'$, $x^\varphi = x'$, $y^\varphi = y'$. Wegen $\bar{a}_\varphi \neq \bar{c}_\varphi$ gilt $\bar{a} \neq \bar{c}$ und nach [4], K_2 gibt es ein $m \in R_1$ mit $t_1(x, a, b) = t_1(x, c, m)$. Hieraus folgt $t_2(x', a', b') = t_2(x', c', m^\varphi)$ und $\bar{t}_2(\bar{x}', \bar{a}', \bar{b}') = \bar{t}_2(\bar{x}', \bar{c}', \bar{m}_\varphi) = \bar{t}_2(\bar{x}', \bar{c}', \bar{d}')$. Da $\bar{T}_2$ ein Ternärring ist, ergibt sich daraus $\bar{m}_\varphi = \bar{d}' = \bar{d}_\varphi$, also $\bar{m} = \bar{d}$. Analog gibt es ein $n \in R_1$ mit $t_1(y, a, b) = t_1(y, c, n)$, wo wieder $\bar{n} = \bar{d}$ ist. Es gilt daher $\bar{t}_1(\bar{x}, \bar{a}, \bar{b}) = \bar{t}_1(\bar{x}, \bar{c}, \bar{d})$, $\bar{t}_1(\bar{y}, \bar{a}, \bar{b}) = \bar{t}_1(\bar{y}, \bar{c}, \bar{d})$. Da T_1 lokal ist, erhält man $\bar{x} = \bar{y}$, also $\bar{x}_\varphi = \bar{y}_\varphi$ und $\bar{x}' = \bar{y}'$.

Ad $K_4'(a)$ Es seien $a', b', c', d' \in R_2$ mit $\bar{a}' \neq \bar{c}'$. Wählen wir Elemente $a, b, c, d \in R_1$ mit $a^\varphi = a'$, $b^\varphi = b'$, $c^\varphi = c'$, $d^\varphi = d'$, dann ist $\bar{a} \neq \bar{c}$ und es gibt genau ein Paar $(x, y) \in R_1 \times R_1$ mit $b = t_1(a, x, y)$, $d = t_1(c, x, y)$. Hieraus folgt $b' =$

$= t_2(a', x^\varphi, y^\varphi)$, $d' = t_2(c', x^\varphi, y^\varphi)$. Es sei $(m', n') \in R_2 \times R_2$ ein anderes Paar mit $b' = t_2(a', m', n')$ und $d' = t_2(c', m', n')$. Dann gibt es ein Paar $(m, n) \in R_1 \times R_1$, so daß $m^\varphi = m'$ und $n^\varphi = n'$. Setzt man $p = t_1(a, m, n)$, $g = t_1(c, m, n)$, so ist $p^\varphi = t_2(a', m', n') = b'$, $g^\varphi = t_2(c', m', n') = d'$ und folglich $\tilde{b} = \tilde{p}$, $\tilde{d} = \tilde{g}$. Nach (J2) ergibt sich $\tilde{m} = \tilde{x}$, $\tilde{n} = \tilde{y}$, also $m^\varphi = x^\varphi$, $n^\varphi = y^\varphi$.

Ad K_4'(b) Es sei $\bar{b}' = \bar{t}_2(\bar{a}', \bar{x}', \bar{y}')$, $\bar{d}' = \bar{t}_2(\bar{c}', \bar{x}', \bar{y}')$ und zugleich $\bar{b}' = \bar{t}_2(\bar{a}', \bar{m}', \bar{n}')$, $\bar{d}' = \bar{t}_2(\bar{c}', \bar{m}', \bar{n}')$ mit $\bar{a}' \neq \bar{c}'$. Wählt man Elemente a, b, c, d, x, y, m, n von R_1 mit $a^\varphi = a'$, $b^\varphi = b'$, $c^\varphi = c'$, $d^\varphi = d'$, $x^\varphi = x'$, $y^\varphi = y'$, $m^\varphi = m'$, $n^\varphi = n'$, dann ist $\bar{a} \neq \bar{c}$. Wird $p_1 = t_1(a, x, y)$, $p_2 = t_1(c, x, y)$, $g_1 = t_1(a, m, n)$, $g_2 = t_1(c, m, n)$ gesetzt, so gilt $p_1^\varphi = t_2(a', x', \bar{y}')$, $p_2^\varphi = t_2(c', x', y')$, $g_1^\varphi = t_2(a', m', n')$, $g_2^\varphi = t_2(c', m', n')$ und $\overline{(p_1)}_\varphi = \bar{t}_2(\bar{a}', \bar{x}', y') = \bar{b}'$, $\overline{(p_2)}_\varphi = \bar{t}_2(\bar{c}', \bar{x}', \bar{y}') = \bar{d}'$, $\overline{(g_1)}_\varphi = \bar{t}_2(\bar{a}', \bar{m}', \bar{n}') = \bar{b}'$, $\overline{(g_2)}_\varphi = \bar{t}_2(\bar{c}', \bar{m}', \bar{n}') = \bar{d}'$. Hieraus folgt $\overline{(p_1)}_\varphi = \overline{(g_1)}_\varphi$, $\overline{(p_2)}_\varphi = \overline{(g_2)}_\varphi$ und $\bar{p}_1 = \bar{g}_1$, $\bar{p}_2 = \bar{g}_2$. Nach der Definition der Ternäroperation $\bar{t}_2$ ergibt sich also $\bar{p}_1 = \bar{t}_1(\bar{a}, \bar{x}, \bar{y})$, $\bar{p}_2 = \bar{t}_1(\bar{c}, \bar{x}, \bar{y})$, $\bar{p}_1 = \bar{t}_1(\bar{a}, \bar{m}, \bar{n})$, $\bar{p}_2 = \bar{t}_1(\bar{c}, \bar{m}, \bar{n})$. Da T_1 lokal mit dem vollständigem Ideal N_1 ist, folgt daraus $\bar{m} = \bar{x}$, $\bar{n} = \bar{y}$, also $\bar{m}_\varphi = \bar{x}_\varphi$, $\bar{n}_\varphi = \bar{y}_\varphi$ und $\bar{m}' = \bar{x}'$, $\bar{n}' = \bar{y}'$.

Bemerkung 4. Nach [4], Satz 6 erhält man: Ist J ein Ideal des lokalen Ternärringes $T_1 = (R_1, t_1)$, dann bildet $\tilde{T} = (R_1/J, \tilde{t})$ einen lokalen Ternärring genau dann, wenn J fastvollständig ist.

Bemerkung 5. Nach Bemerkung 2 ist jedes Ideal des lokalen Ringes fastvollständig.

Bemerkung 6. In [1] führt P. Y. Bacon gewisse Mengen M mit zwei Ternäroperationen T, T' ein, die Biternärringe genannt werden (Definition 2.1.5). Nach den Forderungen (B1)–(B5) der Definition 2.1.3 stellt dann (M, T) einen lokalen Ternärring dar. In [2], Definition 15.1.2 werden dann Ideale der Biternärringe definiert. Nach (J00), (J1)–(J5) ist jedes Ideal des Biternärringes (M, T, T') zugleich ein fastvollständiges Ideal des lokalen Ternärringes (M, T).

Literatur

[1] *Bacon, P. Y.:* An Introduction to Klingenberg Planes. Volume 1, Published by P. Y. Bacon 1976.

[2] *Bacon, P. Y.:* An Introduction to Klingenberg Planes. Volume 2, Published by P. Y. Bacon 1979.

[3] *Lambek, J.:* Lectures on Rings and Modules. Waltham, Massachusetts—Toronto—London 1966.

[4] *Machala, F.:* Erweiterte lokale Ternärringe. Czechoslovak Math. J. *27* (*102*), (1977), 560—572.

[5] *Machala, F.:* Koordinatisation projektiver Ebenen mit Homomorphismus. Czechoslovak Math. J. *27* (*102*), (1977), 573—590.

[6] *Machala, F.:* Koordinatisation affiner Ebenen mit Homomorphismus. Math. Slovaca 27, No *2*, (1977), 181—193.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UP).