Czechoslovak Mathematical Journal

B. V. Godun

О связи между слабой и сильной сходимостью в пространстве Банаха, содержащем ℓ_1

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 34 (1984), No. 2, 252–256

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101948

Czechoslovak Mathematical Journal, 34 (109) 1984, Praha

О СВЯЗИ МЕЖДУ СЛАБОЙ И СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА, СОДЕРЖАЩЕМ l_1

Б . В. ГОДУН, Харьков

(Поступило в редакцию 17/XI 1982 г.)

Фундаментальная альтернатива Х. Розенталя, характеризующая сепарабельные банаховы пространства, содержащие l_1, имеет многочисленные следствия линейно – топологического характера (см. [1]). В этой заметке мы покажем, что наличие в банаховом пространстве подпространства, изоморфного l_1, может сказаться и на геометрических совойствах пространства.

Банахово пространство X обладает H-свойством относительно подпространства $\Gamma \subset X^*$ (что обозначают так $X \in H_\Gamma$), если на его единичной сфере Γ-сходимость последовательностей (т.е. сходимость на функционалах из Γ) совпадает с сильной сходимостью [2]. Подпространство Γ называется тотальным, если условие $f(x) = 0$ для всех $f \in \Gamma$ влечет $x \equiv 0$ $(x \in X)$, и нормирующим, если его характеристика Диксмье

$$r(\Gamma) = \inf_{x \in X} \sup_{f \in \Gamma} \frac{|f(x)|}{\|f\| \cdot \|x\|},$$

строго больше нуля. Тотальность подпространства Γ эквивалентна следующему условию $\Gamma^\perp \cap X = 0$, где $\Gamma^\perp$-аннулятор Γ в пространстве X^{**}. (Каждое банахово пространство мы считаем канонически вложеным в свое второе сопряженное.) Приведем несколько эквивалентных определений характеристики Диксмье подпространства Γ. $r(\Gamma)$ есть верхняя грань чисел $r > 0$ таких, что норма

$$\|x\|_\Gamma = \sup \{|f(x)| : f \in \Gamma,\ \|f\| = 1\}$$

эквивалентна исходной и $r\|x\| \leqq \|x\|_\Gamma \leqq \|x\|$; $r(\Gamma)$ есть нижняя грань чисел λ таких, что замыкание единичного шара V пространства X в топологии $\sigma(X, \Gamma)$ содержится в шаре λV (см. [3]). В частности, если $r(\Gamma) = 1$, то шар V $\sigma(X, \Gamma)$ – замкнут. Ясно, что каждое нормирующее подпространство является тотальным. Обратное не верно и, более того, тотальное подпространство характеристики нуль существует в сопряженном к любому неквазирефлексивному банахову пространству [4], [9].

Известная теорема М. И. Кадеца утверждает [2], что для любого сепарабельного банахова пространства X и любого нормирующего подпространства

$\Gamma \subset X^*$ на X существует эквивалентная норма, в которой $X \in H_\Gamma$. (Это символически будем обозначат так: $X \in h_\Gamma$). Долгое время оставался открытым вопрос М. И. Кадеца о том, влечет ли принадлежность сепарабельного банахова пространства X классу h_Γ нормируемость подпространства Γ. (Несложные рассуждения показывают, что условие $X \in h_\Gamma$ влечет тотальность Γ). Для сепарабельного Γ ответ на этот вопрос положителен ([5], теорема 4.9), однако в общем случае ответ отрицателен:

Пример (Д. ван Дульст, [6]). Если $X = l_1$, то в X^* существует такое тотальное подпространство D характеристики нуль, что $X \in H_D$.

Окончательное решение этого вопроса М. И. Кадеца дает следующая

Теорема. *Для сепарабельного банахова пространства X условие $X \in h_\Gamma$ тогда и только тогда влечет $r(\Gamma) > 0$ для всякого Γ, когда X не содержит подпространств, изоморфных l_1.*

Доказательство. Пусть X не содержит подпороcтранств, изоморфных l_1 и Γ — такое тотальное подпространство X^*, что $X \in H_\Gamma$. Покажем, что в этом случае $r(\Gamma) = 1$. Характеристика подпространства Γ может быть вычислена так [3]:

$$r(\Gamma) = \inf\left\{\frac{\|x^{**} + x\|}{\|x\|} : x \in X\,, \quad x^{**} \in \Gamma^\perp\right\}.$$

Поскольку X не содержит подпространств, изоморфных l_1, то для произвольных элементов $x^{**} \in \Gamma^\perp$ и $x \in X$ найдется такая последовательность $\{x_n\} \subset X$, что $w^* - \lim x_n = x^{**} + x$ и $\|x_n\| = \|x^{**} + x\|$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ (см. [7]). Поскольку $x^{**} \in \Gamma^\perp$, то

$$\Gamma - \lim x_n = x\,. \tag{1}$$

Как было замечено М. И. Кадецом (см. [8], с. 176), условие $X \in H_\Gamma$ в соединении с соотношением (1) влекует $\lim \|x_n\| \geqq \|x\|$. Следовательно, $\|x^{**} + x\| = \lim \|x_n\| \geqq \|x\|$, а это и означает, что $r(\Gamma) = 1$.

Пусть теперь X содержит подпространство Y, изоморфное l_1. Для удобства будем считать, что норма на X такова, что Y изометрично l_1. Ообозначим через i тождественное вложение Y в X, $E = X/Y$ и $F : X \to E$ — фактор-отображение. Пространство E^* будем отождествлять с $Y^\perp \subset X^*$, так как $Y^\perp$ — это образ E^* при линейной изометрии $F^* : E^* \to X^*$. Пусть $D \subset Y^*$-подпространство, фигурирующее в примере Д. ван Дульста, $Z = c_0 \subset Y^* = l_\infty$, где пространство c_0 предполагается естественным образом вложенным в $l_\infty = Y^*$ (так что $Z^* = c_0^* = Y = l_1$) и пусть $R = [D + Z]$. Пусть далее

$$\Gamma = (i^*)^{-1}(D) \text{ и } G = (i^*)^{-1}(R)\,.$$

Ясно, что Γ — тотальное (на X) подпространство X^* характеристики нуль. Покажем, что $X \in h_\Gamma$. Докажем нексколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для ограниченной последовательности* $\{y_n\} \subset Y$ *условые* $D -$ $- \lim y_n = 0$ *влечет* $R - \lim y_n = 0$.

Доказательство. Построение пространства ван Дульста $D \subset l_1^*$ основано на следующем замечании [6]: для любого $k = 1, 2, \ldots$ в пространстве l_1^* существует такое подпространство D_k, что $0 < r(D_k) \leqq 1/k$ и D_k квазидополнительно к $c_0 \subset l_1^* = l_\infty$ (т.е. $D_k \cap c_0 = \{0\}$ и $D_k + c_0$ плотно в l_∞). Заметим, что каждое из пространств D_k обладает следующим свойством: если $\{y_n\} \subset Y$ – ограниченная последовательность и $D_k - \lim y_n = 0$, то $\|y_n\| \to 0$. Действительно, пусть $\{y_{n_j}\}$ – произвольная подпоследовательность последовательности $\{y_n\}$. Поскольку $Y = l_1 = c_0^* = Z^*$, то из нее можно выделить Z-фундаментальную подпоследовательность. Будем считать, что сама последовательность $\{y_{n_j}\}$ Z-фундаментальна. Так как $D_k - \lim y_n = 0$, то эта последовательность будет фундаментальной на плотном в Y^* множестве $D_k + Z$. Так как наша последовательность ограничена, то она слабо* сходится к некоторому $y \in Y^{**}$. Поскольку пространство $Y = l_1$ слабо секвенциально полно, то $\{y_{n_j}\}$ слабо сходится к $y \in Y$. Так как в l_1 слабая сходимость совпадает с сильной, то $\|y_{n_j} - y\| \to 0$. Но при этом $D_k - \lim y_{n_j} = 0$ и поскольку D_k тотально на Y, то $y \equiv 0$. Таким образом, каждая подпоследовательность $\{y_n\}$ содержит подпоследовательность, сильно сходящуюся к нулю. Это и означает, что $\|y_n\| \to 0$.

Далее пространство D строится так [6]: пространство $Y = l_1$ представим в виде $Y = (\sum\limits_k Y_k)_{l_1}$, где $Y_k = Y = l_1$ и пусть P_k – естественный проектор из Y на Y_k. В каждом пространстве Y_k^* построим подпространство D_k и тогда

$$D = (\sum_k D_k)_{l_\infty} \subset (\sum_k Y_k^*)_{l_\infty} = Y^* .$$

Пусть теперь $\{y_n\} \subset Y$ такая ограниченная последовательность, что $D -$ $- \lim y_n = 0$. Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots$ последовательность $\{P_k(y_n)\}$ ограничена и $D_k - \lim P_k(y_n) = 0$. Как было замечено выше, отсюда следует, что для любого $k = 1, 2, \ldots$ $\|P_k(y_n)\| \to 0$. А это означает, что для пространства $Z = c_0 = (\sum c_0)_{c_0} \subset Y^*$ выполняется соотношение $Z - \lim y_n = 0$. Так как $R = [D + Z]$, то $R - \lim y_n = 0$.

Лемма 2. *Пусть* $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ – *такая ограниченная последовательность в* X, *что* $\Gamma - \lim x_n = x_0$. *Тогда найдется последовательность* $v_n = \sum\limits_{i \geqq n} C_i^{(n)} x_i$, $C_i^{(n)} \geqq 0$, $\sum\limits_{i \geqq n} C_i^{(n)} = 1$ *такая, что* $G - \lim v_n = x_0$.

Доказательство. Обозначим $u_n = x_0 - x_n$ и $e_n = F(u_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как, очевидно, $Y^\perp \subset \Gamma$ и $\Gamma - \lim u_n = 0$, то последовательность $\{e_n\}$ сходистя к нулю слабо (т.к. $E^* = Y^\perp$). Согласно теореме Мазура о слабой сходимости найдутся выпуклые комбинации последовательности $\{e_n\}$ вида

$$w_n = \sum_{i \geqq n} C_i^{(n)} e_i \,, \quad C_i^{(n)} \geqq 0 \,, \quad \sum_{i \geqq n} C_i^{(n)} = 1 \,,$$

сходящиеся к нулю по норме пространства E. Это означает, что для последовательности $v_n = \sum_{i \geqq n} C_i^{(n)} u_i$ (так как $F(v_n) = w_n$) выполняется соотношение $\lim \operatorname{dist}(v_n, Y) = 0$. Выберем последовательность $\{y_n\} \subset Y$ так, чтобы

$$(2) \qquad \lim \|v_n - y_n\| = \lim \Big\| \sum_{i \geqq n} C_i^{(n)} u_i - y_n \Big\| = \\ = \lim \Big\| x_0 - \sum_{i \geqq n} C_i^{(n)} x_i - y_n \Big\| = 0\,.$$

Ясно, что последовательность $\{y_n\}$ ограничена $\overline{\lim} \|y_n\| \leqq \sup \|x_n\| + \|x_0\|$. Кроме того, поскольку $\Gamma - \lim u_n = 0$, то $\Gamma - \lim v_n = 0$ и, значит, $\Gamma - \lim y_n = 0$, откуда следует, что $D - \lim y_n = 0$. В силу леммы 1 $R - \lim y_n = 0$ и, значит, $G - \lim y_n = 0$. Согласно условию (2) $G - \lim \sum_{i \geqq n} C_i^{(n)} x_i = x_0$.

Лемма 3. *На пространстве X существует такая эквивалентная норма $\|\cdot\|$, в которой для любой ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ условие $\Gamma - \lim x_n = x_0$ влечет $\underline{\lim} \|x_n\| \geqq \|x_0\|$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что в исходной норме $|\cdot|$ на X $r(G) > 0$. Действительно, характеристика каждого подпространства $R \subset Y^*$ и характеристика его полного прообраза $(i^*)^{(-1)}(R)$ в X^* связаны неравенством $r((i^*)^{-1}(R)) \geqq 1/4 \,.\, r(R)$ [9]. Поскольку для нашего подпространства $R = [D + c_0]$, очевидно, $r(R) = 1$, то $r(G) \geqq 1/4$. Значит норма

$$\|x\| = \|x\|_G = \sup \{|f(x)| : f \in G,\ \|f\| = 1\}$$

эквивалентна исходной и ясно, что в этой норме $r(G) = 1$. Пусть теперь найдется такая последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$, что $\Gamma - \lim x_n = x_0$, $\|x_0\| = 1$, $\|x_n\| \leqq 1 - \delta$, $n = 1, 2, \ldots, \delta > 0$. Тогда в силу леммы 2 найдется набор коэффициентов $\{C_i^{(n)}\}$ такой, что $C_i^{(n)} \geqq 0$, $\sum_{i \geqq n} C_i^{(n)} = 1$ и $G - \lim \sum_{i \geqq n} C_i^{(n)} x_i = x_0$. Поскольку $r(G) = 1$, то отсюда следует (см. [3]), что

$$\underline{\lim} \Big\| \sum_{i \geqq n} C_i^{(n)} x_i \Big\| \geqq \|x_0\|\,.$$

Значит

$$1 = \|x_0\| \leqq \underline{\lim} \Big\| \sum_{i \geqq n} C_i^{(n)} x_i \Big\| \leqq \sup_n \|x_n\| \leqq 1 - \delta\,,$$

это противоречие завершает доказательство леммы.

Замечание. В норме, построенной в лемме 3, единичный шар пространства X $\sigma(X, \Gamma)$ — секвенциально замкнут и при этом его $\sigma(X, \Gamma)$ — замыкание не ограничено (псокольку $r(\Gamma) = 0$).

Вернемся к доказательству теоремы. Для построения эквивалентной нормы, в которой $X \in H_\Gamma$, применим прием Дэвиса-Джонсона [10]. Пусть норма $\|\cdot\|$ на X введена, как в лемме 3. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность вложеных $(X_n \subset X_{n+1})$ конечномерных подпространств X, объединение которых плотно в X. Введем на X эквивалентную норму $|||\cdot|||$, полагая для каждого $x \in X$

$$|||x||| = \|x\| + \sum 2^{-k} \operatorname{dist}(x, X_k),$$

и покажем, что эта норма обладает требуемым свойством. Пусть последовательность $\{X_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ такова, что

$$(3) \qquad \Gamma - \lim (x_n + x_0) = x_0, \quad |||x_n + x_0||| \to |||x_0|||$$

Тогда в силу леммы 3 имеем $\underline{\lim} \|x_0 + x_n\| \geqq \|x_0\|$, откуда, как легко видеть, следует, что $\underline{\lim} \operatorname{dist}(x_0 + x_n, X_k) \geqq \operatorname{dist}(x_0, X_n)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Из этих соотношений и условия (3) получаем

$$(4) \qquad \|x_n + x_0\| \to \|x_0\|, \quad \operatorname{dist}(x_n + x_0, X_k) \to \operatorname{dist}(x_0, X_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Так как $\operatorname{dist}(x_0, X_k) \to 0$ $(k \to \infty)$ и единичный шар каждого из пространств X_k компактен, то соотношение (4) влечет (см. [10]) $\|x_n\| \to 0$. Поскольку нормы $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ эквивалентны, то $|||x_n||| \to 0$, то есть в норме $|||\cdot|||$ $X \in H_\Gamma$.

Литература

[1] *H. P. Rosenthal:* Some recent discoveries in the isomorphic theory of Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., *84* (1978), 803—831.

[2] *М. И. Кадец:* О связи между слабой и сильной сходимостью, ДАН СССР, *9* (1957), 949—952.

[3] *Ю. И. Петунин, А. Н. Пличко:* Теория характеристик подпространств и ее проложения, Киев, ВШ, 1980.

[4] *W. J. Davis, J. Lindenstrauss:* On total non-norming subspaces, Proc. Amer. Math. Soc., *31* (1972), 109—III.

[5] *В. Д. Мильман:* Геометрическая теория пространств Банаха, Часть II, УМН, *26*, (1971), 79—149.

[6] *D. van Dulst:* On certain subspace of characterictic zero of l_1, Compos. Math., *28*, (1974), 195—201.

[7] *E. Odell, H. P. Rosenthal:* A double dual characterization of separable Banach spaces containing l_1, Israel J. Math., *20* (1975), 375—384.

[8] *C. Bessaga, A. Pelczynski:* Selected topics in infinite-dimensional topology, Warszawa, PWN, 1975.

[9] *W. J. Davis, W. B. Johnson:* Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces, Israel J. Math., *14* (1973), 353—357.

[10] *W. J. Davis, W. B. Johnson:* A renorming of non-reflexive Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc., *37* (1973), 486—488.

Адрес автора: Харьков-24, ул. Чайковского, 24, кв. 21, СССР.