Irena Rachůnková

Об одной нелинейной задаче для дифференциальных систем n-го порядка

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 34 (1984), No. 2, 285–297

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101950

Czechoslovak Mathematical Journal, 34 (109) 1984, Praha

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ n-ГО ПОРЯДКА

IRENA RACHŮNKOVÁ (ИРЕНА РАХУНКОВА), Olomouc

(Поступило в редакцию 2/III 1983 г.)

В настоящей статье исследуется задача об отыскании решения дифференциальной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{0.1}$$

определённого в промежутке $[0, +\infty[$ и удовлетворяющего условиям

$$\varphi(x_1(0), \ldots, x_n(0)) = 0\,, \quad x_i(t) \geqq 0 \quad \text{при} \quad t \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{0.2}$$

Из работ, посвещенных аналогичным задачам для дифференциальных систем, отметим [6–8]. В отличие от упомянутых работ, теоремы разрешимости задачи (0.1), (0, 2), доказанные в настоящей статье, охватывают случай знакопеременности функций f_i $(i = 1, \ldots, n)$. Этот случай рассматривается также в [11–13].

1. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$R =]-\infty, +\infty[\,; \quad R_+ = [0, +\infty[\,;$$

$$B_{nm}(r) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+ : x_i \leqq r \ (i = 1, \ldots, m)\}\,;$$

$L(I)$ – множество вещественных функций, интегрируемых по Лебегу на I;

$L_{loc}(I)$ – множество вещественных функций, интегрируемых по Лебегу на каждом сегменте, содержащемся в I;

$\tilde{C}(I)$ – множество вещественных функций, абсолютно непрерывных на I;

$\tilde{C}_{loc}(I)$ – множество вещественных функций, абсолютно непрерывных на каждом сегменте содержащемся в I;

запись $f \in K_{loc}(R_+ \times I)$ означает, что $f : R_+ \times I \to R$ удовлетворяет локальным условиям Каратеодори на каждом сегменте, содержащемся в R_+, т.е.

$$f(\cdot, x_1, \ldots, x_n) : R_+ \to R \quad \text{измерима при любом} \quad (x_1, \ldots, x_n) \in I\,,$$

$$f(t, \cdot, \ldots, \cdot) \quad : I \quad \to R \quad \text{непрерывна при почти всех} \quad t \in R_+$$

и $\sup\{|f(\cdot, x_1, \ldots, x_n)| : |x_i| \leqq \varrho \ (i = 1, \ldots, n)\} \in L_{\text{loc}}(R_+)$ для всех $\varrho \in R_+$. Говорят, что вектор-функция $(g_1, \ldots, g_n) : R_+^{n+1} \to R^n$ не убывает по внедиагональным переменным, если при каждом $i \in \{1, \ldots, n\}$ из

$$x_1 \leqq y_1, \ldots, x_{i-1} \leqq y_{i-1}, \ x_{i+1} \leqq y_{i+1}, \ldots, x_n \leqq y_n$$

вытекает, что

$$g_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqq g_i(t, y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, \ldots, y_n).$$

Всюду ниже предполагается, что $n \geqq 2$, функция $\varphi : R_+^n \to R$ является непрерывной а $f_i \in K_{\text{loc}}(R_+^{n+1})$ для $i = 1, \ldots, n$. Решение задачи (0.1), (0.2) ищестя в классе вектор-функций

$$(x_1, \ldots, x_n) : R_+ \to R^n, \quad x_i \in \tilde{C}_{\text{loc}}(R_+), \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Доказанные ниже теоремы существования касаются случая, когда

$$(1.1) \qquad f_i(t, 0, \ldots, 0) = 0 \quad \text{и} \quad f_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqq 0 \quad \text{для}$$
$$i = 1, \ldots, n, \quad t \in R_+ \quad \text{и} \quad (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in R_+^{n-1}$$

и φ удовлетворяет условию

$$(1.2\text{m}) \qquad \varphi(0, \ldots, 0) < 0, \ \varphi(x_1, \ldots, x_n) > 0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i > r, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n,$$
$$\text{где} \quad r \in]0, +\infty[, \quad m \in \{1, \ldots, n\}.$$

Теорема 1.1. *Пусть* $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, *выполняются условия* (1.1), (1.2m), $a_0 \in R_+$, $a > a_0$, $h \in L_{\text{loc}}(R_+)$ *и функция* $\delta : R_+ \to R_+$ *удовлетворяет условию*

$$(1.3) \qquad \lim_{x \to +\infty} \delta(x) = +\infty.$$

Пусть, далее, на множестве $[0, a] \times B_{nm}(r)$ выполнены неравенства

$$(1.4) \qquad f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq 0 \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$(1.5) \qquad \sum_{i=m+1}^{n} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqq -h(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i),$$

на множестве $[a_0, a] \times B_{nm}(r)$ неравенство

$$(1.6) \qquad \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq -\delta\Big(\sum_{i=m+1}^{n} x_i\Big)$$

и на множестве $[a_0, +\infty[\times R_+^n$ неравенство

$$(1.7) \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq h(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i).$$

Тогда задача (0.1), (0.2) разрешима.

Теорема 1.2. *Пусть* $m \in \{1, \ldots, n-2\}$, *пусть выполняются условия* (1.1) *и* (1.2m), *и пусть кроме того существуют вещественные числа* $a > 0$, $\delta > 0$, $\mu > 0$, $\lambda > 1$, *функция* $h \in L_{\mathrm{loc}}(]0, +\infty[)$ *и функция* $h_0 \in L([0, a])$ *такие, что* $h_0(t) > 0$ *при* $0 < t < a$ *и*

$$(1.8) \qquad \int_0^a \left[\int_0^t h_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right]^{\mu/(1-\lambda)} \mathrm{d}t = +\infty\,.$$

Пусть, далее, на множестве $[0, a] \times B_{nm}(r)$ *выполнены неравенства* (1.4) *и*

$$(1.9) \qquad \sum_{i=m+1}^{n} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqq -h_0(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i)^{\lambda}\,,$$

на множестве $]0, a] \times B_{nm}(r)$ *неравенство*

$$(1.10) \qquad \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq -\delta\Big(\sum_{i=m+1}^{n} x_i \Big)^{\mu}$$

и на множестве $]0, +\infty[\times R^n_+$ *неравенство* (1.7).

Тогда задача (0.1), (0.2) *разрешима.*

Теорема 1.3. *Пусть выполняются условия* (1.1) *и* (1.2n) *и пусть на множестве* $]0, +\infty[\times R^n_+$ *выполнено неравенство* (1.7), *где* $h \in L_{\mathrm{loc}}(]0, +\infty[)$.

Тогда задача (0.1), (0.2) *разрешима.*

2. ЛЕММЫ

В этом пункте мы приведем леммы, нужные для доказательства теорем.

Лемма 2.1 (О дифференциальных неравенствах). *Пусть* $I \subset R^n$, $g_i \in K_{\mathrm{loc}}(R_+ \times I)$, $(i = 1, \ldots, n)$, *вектор-функция* $(g_1, \ldots, g_n) \operatorname{sign}(t - t_0)$ *не убывает по внедиагональным переменным и задача*

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = g_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

$$x_i(t_0) = x_{0i} \quad (i = 1, \ldots, n)\,, \quad t_0 \in R_+\,, \quad (x_{01}, \ldots, x_{0n}) \in I$$

имеет определенное на R_+ *верхнее и нижнее решения* $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ *и* $(x_{1*}, \ldots, x_{n*})$.

Тогда, какова бы ни была вектор-функция $(y_1, \ldots, y_n)$, $y_i \in \tilde{C}_{\mathrm{loc}}(R_+)$ $(i = 1, \ldots, n)$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$y_i(t_0) \leqq x_{0i}\,, \quad (y_i'(t) - g_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))) \operatorname{sign}(t - t_0) \leqq 0$$
$$\text{при} \quad t \in R_+ \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$[y_i(t_0) \geqq x_{0i}, \; (y_i'(t) - g_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))) \operatorname{sign}(t - t_0) \geqq 0$$
$$\text{при} \quad t \in R_+ \quad (i = 1, \ldots, n)]\,,$$

будем иметь

$$y_i(t) \leqq x_i^*(t) \quad [y_i(t) \geqq x_{i*}(t)] \quad \textit{при} \quad t \in R_+ \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Доказательство. [9], Лемма 4.3, стр. 44–48.

Лемма 2.2. *Пусть* $f_{ip} \in K_{\mathrm{loc}}(R_+^{n+1})$ $(i = 1, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots)$ *и пусть на множестве* R_+^{n+1} *выполнены неравенства*

$$\sum_{i=1}^{n} |f_{ip}(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq f_0(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

и

$$\lim_{p \to \infty} f_{ip}(t, x_1, \ldots, x_n) = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

где $f_0 \in K_{\mathrm{loc}}(R_+^{n+1})$. *Пусть, далее, при любом натуральном p система дифференциальных уравнений*

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_{ip}(t, x_1, \ldots, x_n)\ (i = 1, \ldots, n)$$

имеет решение $(x_{1p}, \ldots, x_{np})$, *удовлетворяющее условию* (0.2), *и пусть существует функция* $\psi(t) \in L_{\mathrm{loc}}(R_+)$ *такая, что*

$$\sup \Big\{ \sum_{i=1}^{n} |x_{ip}(t)| : p = 1, 2, \ldots \Big\} \leqq \psi(t) \quad \textit{при} \quad t \in R_+\,.$$

Тогда из последовательности $\{(x_{1p}, \ldots, x_{np})\}_{p=1}^{+\infty}$ *можно выделить равномерно сходящуюся на каждом сегменте* $I \subset R_+$ *подпоследовательность, предель которой является решением задачи* (0.1), (0.2).

Доказательство. [9], предложение 2.1, стр. 17–19.

В следующей лемме для системы (0.1) рассматривается вспомогательная краевая задача

$$\varphi(x_1(0), \ldots, x_n(0)) = 0\,, \quad x_i(b) = 0 \quad (i = 2, \ldots, n)\,, \tag{2.1}$$

где $b > 0$.

Лемма 2.3. *Пусть выполняются условия* (1.1) *и* (1.2$_1$) *и пусть на множестве* $[0, b] \times R_+^n$

$$\sum_{i=1}^{n} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq h^*(t) \sum_{i=2}^{n} (1 + x_i)\,,$$

где $h^* \in L([0, b])$.

Тогда задача (0.1), (2.1) *имеет хотя бы одно решение* $(x_1, \ldots, x_n)$ *такое, что*

$$x_i(t) \geqq 0 \quad \textit{при} \quad 0 \leqq t \leqq b \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Доказателство. [13], лемма 3.2.

Лемма 2.4 (Об априорной оценке). *Пусть* $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, $a_0 \in R_+$, $a > a_0$, $r > 0$, $h \in L_{\text{loc}}(R_+)$, $h(t) \geqq 0$ *при* $t \in R_+$ *и* $\delta_0 : R_+ \to R_+$ *— неубывающая непрерывная функция, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{x \to \infty} \delta_0(x) > \frac{r}{a - a_0} \,. \tag{2.2}$$

Тогда существует число $r^* > r$ *такое, что каковы бы ни были* $b > a$ *и абсолютно непрерывные функции* $x_i : [0, b] \to R_+$ $(i = 1, \ldots, n)$, *из неравенств*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i(0) \leqq r \,, \quad x_i(t) \geqq 0 \quad \textit{при} \quad 0 \leqq t \leqq b \ (i = 1, \ldots, n) \,, \tag{2.3}$$

$$x_i'(t) \leqq 0 \quad \textit{при} \quad 0 \leqq t \leqq a \ (i = 1, \ldots, m) \,, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} x_i'(t) \geqq -h(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i(t)) \quad \textit{при} \quad 0 \leqq t \leqq a \,, \tag{2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i'(t) \leqq -\delta_0 \Big(\sum_{i=m+1}^{n} x_i(t) \Big) \qquad \textit{при} \quad a_0 \leqq t \leqq a \,, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \leqq \quad h(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i(t)) \quad \textit{при} \quad a_0 \leqq t \leqq b \tag{2.7}$$

вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) \leqq r^* \exp\left[\int_0^t h(\tau)\, d\tau \right] \quad \textit{при} \quad 0 \leqq t \leqq b \,. \tag{2.8}$$

Доказательство. Подберем $r_0 > 0$ таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\delta_0(x) > \frac{r}{a - a_0} \quad \text{при} \quad x > r_0 \,. \tag{2.9}$$

Ввиду (2.3) и (2.4) из (2.6) получим

$$r \geqq \sum_{i=1}^{m} x_i(a_0) - \sum_{i=1}^{m} x_i(a) \geqq \int_{a_0}^{a} \delta_0\Big(\sum_{i=m+1}^{n} x_i(t) \Big)\, dt \,.$$

Отсюда согласно (2.9) вытекает существование такого числа $t_0 \in [a_0, a]$, что

$$\sum_{i=m+1}^{n} x_i(t_0) \leqq r_0 \,. \tag{2.10}$$

С учетом (2.10) из (2.5) получаем

$$\sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i(t)) \leqq (r_0 + n) \exp \int_t^{t_0} h(\tau)\, d\tau \leqq (r_0 + n) \exp \int_0^{a} h(\tau)\, d\tau$$

$$\text{при} \quad 0 \leqq t \leqq t_0 \,.$$

Ввиду (2.3) и (2.4) из последнего неравенства вытекает

$$(2.11) \qquad \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i(t)) \leqq r^* \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq t_0 \,,$$

где

$$r^* = r + (n + r_0) \exp \int_0^a h(\tau) \, d\tau \,.$$

Отсюда, в силу (2.7), следует

$$(2.12) \qquad \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i(t)) \leqq r^* \exp \int_{t_0}^{t} h(\tau) \, d\tau \quad \text{при} \quad t_0 \leqq t \leqq b \,.$$

Из (2.11) и (2.12) вытекает оценка (2.8), где r^* – постоянная, независящая от b, $x_1, \ldots, x_n$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство теоермы 1.1. Без ограничения общности можно предполагать, что $h(t) \geqq 0$ при $t \in R_+$. Подберем число $r_0 \in \,]r, +\infty[$ и неубывающую непрерывную функцию $\delta_0 : R_+ \to R_+$ таким образом, чтобы

$$\delta(x) \geqq \delta_0(x) \quad \text{при} \quad x \geqq 0$$

и

$$\delta_0(x) = \delta_0(r_0) > \frac{r}{a - a_0} \quad \text{при} \quad x \geqq r_0 \,.$$

Пусть $r^* > r$ постоянная, фигурирующая в лемме 2.4. Положим

$$\varrho(t) = r^* \exp \left[\int_0^t h(\tau) \, d\tau \right] + r_0 \,,$$

$$\sigma(t, s) = \begin{cases} s & \text{при} \quad 0 \leqq s \leqq \varrho(t) \\ \varrho(t) & \text{при} \quad s > \varrho(t) \,, \end{cases}$$

$\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = f_i(t, \sigma(t, x_1), \ldots, \sigma(t, x_n))$ $(i = 1, \ldots, n)$ и построим дифференциальную систему

$$(3.1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \,.$$

Из определения функций $\tilde{f}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ следует, что

$$(3.2) \qquad \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{при}$$

$$(t, x_1, \ldots, x_n) \in R_+^{n+1} \,, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \leqq \varrho(t) \,;$$

на множестве $[0, a] \times B_{nm}(r)$ выполнены неравенства

$$(3.3) \qquad \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq 0 \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$(3.4) \qquad \sum_{i=m+1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=m+1}^{n} f_i(t, \sigma(t, x_1), \ldots, \sigma(t, x_n)) \geqq$$

$$\geqq -h(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + \sigma(t, x_i)) \geqq -h(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i),$$

на множестве $[a_0, a] \times B_{nm}(r)$ неравенство

$$(3.5) \qquad \sum_{i=1}^{m} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq -\delta\Big(\sum_{i=m+1}^{n} \sigma(t, x_i)\Big) \leqq -\delta_0\Big(\sum_{i=m+1}^{n} x_i\Big),$$

и на множестве $[a_0, +\infty[\times R_+^n$ неравенство

$$(3.6) \qquad \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq h(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + \sigma(t, x_i)) \leqq h(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i).$$

Далее, функции $\tilde{f}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ на множестве R_+^{n+1} удовлетворяют неравенству

$$(3.7) \qquad \sum_{i=1}^{n} |\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq h^*(t),$$

где

$$h^*(t) = \max\Big\{\sum_{i=1}^{n} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| : 0 \leqq x_j \leqq \varrho(t), \ (j = 1, \ldots, n)\Big\}$$

и

$$h^* \in L_{\mathrm{loc}}(R_+).$$

В силу леммы 2.3 при любом натуральном p система (3.1) имеет решение $(x_{1p}, \ldots, x_{np})$, определённое на отрезке $[0, a + p]$ и удовлетворяющее условиям

$$(3.8) \qquad (x_{1p}(0), \ldots, x_{np}(0)) = 0, \quad x_{ip}(t) \geqq 0$$
$$\text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a + p \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ввиду (1.2m) и (3.3) мы имеем

$$(3.9) \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ip}(t) \leqq \sum_{i=1}^{m} x_{ip}(0) \leqq r \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a.$$

С другой стороны, согласно неравенствам (3.3)–(3.6), мы получаем

$$(3.10) \qquad x'_{ip}(t) \leqq 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a \quad (i = 1, \ldots, m),$$

$$(3.11) \qquad \sum_{i=1}^{m} x'_{ip}(t) \geqq -h(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_{ip}(t)) \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a,$$

$$(3.12) \qquad \sum_{i=1}^{m} x'_{ip}(t) \leqq -\delta_0\Big(\sum_{i=m+1}^{n} x_{ip}(t)\Big) \qquad \text{при} \quad a_0 \leqq t \leqq a$$

и

$$(3.13) \qquad \sum_{i=1}^{n} x'_{ip}(t) \leqq h(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_{ip}(t)) \quad \text{при} \quad a_0 \leqq t \leqq a + p.$$

В силу леммы 2.4 из (3.8)–(3.13) вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ip}(t) \leqq \varrho(t) \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a + p\,. \tag{3.14}$$

Из условий (3.2), (3.8) и (3.14) следует, что $(x_{1p}, \ldots, x_{np})$ является решением систем (0.1) на $[0, a + p]$. Полагая

$$f_{ip}(t, x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) & \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a + p \\ 0 & \text{при} \quad t > a + p \end{cases}$$

и учитывая (3.14), можно, в силу леммы 2.2, из последовательности $\{(x_{1p}, \ldots \ldots, x_{np})\}_{p=1}^{\infty}$ выделить равномерно сходящуюся на каждом сегменте $I \subset R_+$ подпоследовательнось, предель которой является решением задачи (0.1), (0.2) на R_+.

Доказательство теоремы 1.2. Без ограничения общности число $a > 0$ можно выбрать настолько малым, что

$$\int_0^a h_0(t)\,\mathrm{d}t < \frac{n_0^{1-\lambda}}{\lambda - 1}, \quad \text{где} \quad n_0 = n - m\,. \tag{3.15}$$

В силу (1.8) и (3.15) существуют числа $a_0 \in]0, a[$ и $\varepsilon \in]0, 1[$ такие, что

$$\varrho(t) = \left[\varepsilon + (\lambda - 1)\int_0^t h_0(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]^{1/(1-\lambda)} - n_0 > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a \tag{3.16}$$

и

$$\delta \int_{a_0}^{a} (\varrho(t))^{\mu}\,\mathrm{d}t > r\,. \tag{3.17}$$

Положим

$$\sigma(s, k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqq s \leqq k \\ 2 - (s/k) & \text{при} \quad k < s < 2k \\ 0 & \text{при} \quad 2k \leqq s \end{cases}$$

и

$$\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= f_i(t, \sigma(\sum_{i=1}^{m} x_i, r)\,x_1, \ldots, \sigma(\sum_{i=1}^{m} x_i, r)\,x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, m + 1)\,,$$
$$\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \sigma(\sum_{i=1}^{m} x_i, r)\,\sigma(\sum_{i=m+1}^{m} x_i, \varrho(0))\,f_i(t, x_1, \ldots, x_n)\,,$$
$$(i = m + 1, \ldots, n)\,, \quad \text{при} \quad t \leqq a_0\,,$$
$$\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)\,, \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{при} \quad t > a_0\,.$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n). \tag{3.18}$$

Тогда ввиду (1.4) на множестве $[0, a] \times B_{nm}(r)$ выполнено неравенство

$$\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq 0\,, \quad (i = 1, \ldots, m)\,. \tag{3.19}$$

С учетом (1.9) на множестве $[a_0, a] \times B_{nm}(r)$

$$\sum_{i=m+1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=m+1}^{n} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqq -h_0(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i)^\lambda$$

и на множестве $[0, a_0] \times B_{nm}(r)$

$$\sum_{i=m+1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sigma(\sum_{i=1}^{m} x_i, r)\, \sigma(\sum_{i=m+1}^{n} x_i, \varrho(0)) \sum_{i=m+1}^{n} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqq$$

$$\geqq \sigma(\sum_{i=1}^{m} x_i, r)\, \sigma(\sum_{i=m+1}^{n} x_i, \varrho(0)) \,(-h_0(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i)^\lambda) \geqq$$

$$\geqq -h_0(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i)^\lambda\,,$$

т.е. на множестве $[0, a] \times B_{nm}(r)$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=m+1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqq -h_0(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i)^\lambda\,. \tag{3.20}$$

Аналогично, с учетом (1.10), на множестве $[a_0, a] \times B_{nm}(r)$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq -\delta(\sum_{i=m+1}^{n} x_i)^\mu$$

и на множестве $]0, a_0] \times B_{nm}(r)$

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f_i(t, \sigma(\sum_{i=1}^{m} x_i, r)\, x_1, \ldots, \sigma(\sum_{i=1}^{m} x_i, r)\, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \leqq -\delta(\sum_{i=m+1}^{n} x_i)^\mu\,,$$

т.е. на множестве $]0, a] \times B_{nm}(r)$ мы имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq -\delta(\sum_{i=m+1}^{n} x_i)^\mu\,. \tag{3.21}$$

Пусть

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} \max \left\{ [\sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i)]^{-1} \sum_{i=m+1}^{n} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| : (x_1, \ldots, x_n) \in B_{nm}(2r), \ \sum_{i=m+1}^{n} x_i \leqq 2\,\varrho(0) \right\}, & 0 \leqq t \leqq a_0\,, \\ h(t) \quad \text{при} \quad t > a_0\,. \end{cases}$$

Тогда на множестве $[0, a_0] \times B_{nm}(r)$ выполняется неравенство

(3.22)
$$\sum_{i=m+1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \geqq$$
$$\geqq -\sigma\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i, r\Big)\, \sigma\Big(\sum_{i=m+1}^{n} x_i, \varrho(0)\Big) \sum_{i=m+1}^{n} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \geqq -\tilde{h}(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i)\,.$$

Далее, на множестве $]0, a_0] \times B_{nm}(r)$ имеет место (3.21), где фунция $\delta(\sum_{i=m+1}^{n} x_i)^\mu$ удовлетворяет условию (1.3) теоремы 1.1. Для $(t, x_1, \ldots, x_n) \in [0, a_0] \times R^n_+$ мы получаем ввиду (3.19) неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq \sum_{i=m+1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq$$
$$\leqq \sigma\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i, r\Big)\, \sigma\Big(\sum_{i=m+1}^{n} x_i, \varrho(0)\Big) \sum_{i=m+1}^{n} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq$$
$$\leqq \tilde{h}(t) \sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i) \leqq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i)$$

и при $(t, x_1, \ldots, x_n) \in (a_0, \infty) \times R^n_+$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq h(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i) = \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i)\,.$$

Это значит, что на множестве $[0, \infty[\times R^n_+$ выполняется неравенство

(3.23)
$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i)\,.$$

Согласно (3.19), (3.21)–(3.23) функции $\tilde{f}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1 и поэтому система (3.18) имеет решение $(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющее условиям (0.2). Ввиду (1.2m) и (3.19)

(3.24)
$$0 \leqq \sum_{i=1}^{m} x_i(t) \leqq \sum_{i=1}^{m} x_i(0) \leqq r \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a\,.$$

Интегрируя (3.21) от a_0 до a, мы получаем в силу (3.24) неравенство

(3.25)
$$r \geqq \sum_{i=1}^{m} x_i(a_0) - \sum_{i=1}^{m} x_i(a) \geqq \delta \int_{a_0}^{a} \Big(\sum_{i=m+1}^{n} x_i(t)\Big)^\mu \, dt\,.$$

Из (3.17) и (3.25) вытекает существование такого $t_0 \in [a_0, a]$, что

$$\sum_{i=m+1}^{n} (x_i(t_0) + 1) < \varrho(t_0) + n_0\,.$$

Согласно (3.20) и (3.16) мы получаем

$$\sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i(t))' \geqq h_0(t) \Big(\sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i(t))^\lambda \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a$$

и

$$\varrho'(t) = -h_0(t)\,(\varrho(t) + n_0)^{\lambda} \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a\,.$$

Применяя лемму 2.1, мы заключаем, что

$$\sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i(t)) < \varrho(t) + n_0 \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq t_0\,.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=m+1}^{n} (1 + x_i(t)) < \varrho(0) + n_0 \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq t_0$$

т.е. имеет место неравенство

$$\sum_{i=m+1}^{n} x_i(t) < \varrho(0) \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq t_0\,. \tag{3.26}$$

Из (3.24), (3.26) и определения функций $\tilde{f}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ вытекает, что $(x_1, \ldots, x_n)$ является решением системы (0.1).

Доказательство теоремы 1.3. Пусть

$$f^*(t) = \max\Big\{\sum_{i=1}^{n} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| : (x_1, \ldots, x_n) \in B_{nn}(4r),\ t \in R^+\Big\}$$

и пусть $a > 0$ настолько мало, что

$$\int_0^a f^*(t)\,\mathrm{d}t < r\,.$$

Положим

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} f^*(t) & \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a \\ h(t) & \text{при} \quad t > a \end{cases}$$

$$\varrho(t) = 2r \exp \int_0^t \tilde{h}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \text{при} \quad t \in R^+$$

и

$$\sigma(v(t), s) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \leqq s \leqq v(t) \\ 2 - (s/v(t)) & \text{при} \quad v(t) < s < 2\,v(t) \\ 0 & \text{при} \quad s \geqq 2\,v(t)\,. \end{cases}$$

Далее, положим

$$\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sigma(2r, \sum_{i=1}^{n} x_i)\ f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a\,,$$

$$\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) = \sigma(\varrho(t), \sum_{i=1}^{n} x_i)\,f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad t > a$$

$(i = 1, \ldots, n)$ и рассмотрим дифференциальную систему (3.1).

Функции $\tilde{f}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq \sigma(2r, \sum_{i=1}^{n} x_i) \sum_{i=1}^{n} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i)$$

$$\text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a\,, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq \sigma(\varrho(t), \sum_{i=1}^{n} x_i))\, h(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i) \leqq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i)$$

$$\text{при} \quad t > a\,, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n\,.$$

Следовательно,

$$(3.27) \qquad \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n) \leqq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i) \quad \text{при} \quad t \geqq 0,\ (x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n\,.$$

Далее

$$(3.28) \qquad \sum_{i=1}^{n} |\tilde{f}_i(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq h^*(t) \quad \text{при} \quad t \geqq 0,\ (x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n\,,$$

где

$$h^*(t) = \max \{ \sum_{i=1}^{n} |f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| : (x_1, \ldots, x_n) \in B_{nn}(2\,\varrho(t))\}$$

и

$$h^* \in L_{\mathrm{loc}}(R_+)\,.$$

Из (3.28) в силу леммы 2.3 следует, что при любом натуральном p система (3.1) имеет решение $(x_{1p}, \ldots, x_{np})$, определенное на отрезке $[0, a + p]$ и удовлетворяющее условиям (3.8). Ввиду (1.2n) мы имеем

$$(3.29) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{ip}(0) \leqq r\,.$$

С другой стороны, согласно неравенству (3.27), мы получаем

$$(\sum_{i=1}^{n} (1 + x_{ip}(t)))' \leqq \tilde{h}(t) \sum_{i=1}^{n} (1 + x_{ip}(t)) \quad \text{при} \quad t \geqq 0\,.$$

Следовательно, ввиду (3.29), отсюда вытекает оценка

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ip}(t) \leqq \varrho(t) \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a + p\,.$$

Далее

$$|\sum_{i=1}^{n} x_{ip}(t)| \leqq r + \int_0^a f^*(t)\,\mathrm{d}t < 2r \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq a\,.$$

Отсюда видно, что при любом натуральном p вектор-функция $(x_{1p}, \ldots, x_{np})$ является решением задачи (0.1), (0.2) на $[0, a + p]$. Доказательство существования решения задачи (0.1), (0.2) на R_+ аналогично доказательству теоремы 1.1.

Литература

[1] *A. Kneser:* Untersuchung und asymptoticshe Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen Werthen des Arguments, Journ. für die reine und angew. Math., *116* (1896), 178—212.

[2] *A. Mambriani:* Sul un teorema relative alle equazioni differenziali ordinairie del 2^{do} ordine, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, *9* (1929), 620—622.

[3] *P. Hartman, A. Wintner:* On the non-increasing solutions of $y'' = f(x, y, y')$, Amer. Journal of Math., *73* (1951), 390—404.

[4] *I. T. Kiguradze:* On the non-negative non-increasing solutions of non-linear second order differential equations, Ann. di Mat. pura ed appl., *81* (1969), 169—192.

[5] *И. Т. Кигурадзе:* О монотонных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений н-го порядка, Изв. АН СССР, сер. матем., *33* (1969), 1373—1398.

[6] *P. Hartman, A. Wintner:* On monotone solutions of systems of non linear differential equations, Amer. Journ of Math., *76* (1954), 860—866.

[7] *C. V. Coffman:* Non-linear differential equations on cones in Banach spaces, Pacific Journ. Math., *14* (1964), 9—16.

[8] *Т. А. Чантурия:* О задаче типа Кнезера для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Матем. заметки, *15* (1974), 897—906.

[9] *И. Т. Кигурадзе:* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. Тбилисского унив., Тбилиси, 1975.

[10] *И. Т. Кигурадзе, И. Рахункова:* О разрешимости нелинейной задачи типа Кнезера, Дифф. уравнения, *15* (1979), 1754—1765.

[11] *И. Рахункова:* О задаче Кнезера для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, Сообщ. АН Грузинской ССР, *94* (1979), 545—547.

[12] *I. T. Kiguradze, I. Rachůnková:* On a certain nonlinear problem for two-dimensional differential systems, Arch. Math. (Brno), *16* (1980), 15—38.

[13] *I. Rachůnková:* On a Kneser problem for a system of nonlinear ordinary differential equations, Czechoslovak Math. J., *31* (*106*) (1981), 114—126.

Адрес автора: 771 46 Olomouc, Gottwaldova 15, ČSSR (Přírodovědecká fakulta UP).