Andrey V. Koldunov

Особенности строения o-пополнения архимедовой ℓ-группы с сильной единицей

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 37 (1987), No. 1, 1–3,4–6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102129

CZECHOSLOVAK MATHEMATICAL JOURNAL
Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences
V. *37* (*112*), PRAHA 28. 3. 1987, No 1

ОСОБЕННОСТИ СТРОЕНИЯ o-ПОПОЛНЕНИЯ АРХИМЕДОВОЙ l-ГРУППЫ С СИЛЬНОЙ ЕДИНИЦЕЙ

А. В. КОЛДУНОВ, Ленинград

(Поступило в редакцию 21/I 1980 г.)

В [1], [2] было показано, что o-пополнение архимедовой l-группы X можно получить путем присоединения к X пределов всех o-фундаментальных последовательностей. Таким образом каждый элемент из oX является o-пределом некоторой последовательности из X.

Основной целью заметки является описание o-пополнения oX архимедовой l-группы непрерывных функций на бикомпакте B, разделяющей точки B и содержащей тождественную единицу **1**, причем описание будет дано с помощью функций, непрерывных на плотных подмножествах B (Для векторных решеток аналогичные результаты получены в [3]). В результате такого описания будет легко установить, почему oX не обязано быть равномерным и даже не содержать равномерного пополнения EX l-группы X (напомним, что для векторных решеток oX всегда равномерно полно ([4]).

Введем необходимые обозначения. Обозначим

$$A(\mathfrak{N}(B), n) = \{t \in B \mid x(t) = l/k,\ k \in N,\ k \leqq n,\ l \in I,\ x \in \mathfrak{N}(B)\},$$

причем $\mathfrak{N}(B)$ всегда обозначает l-группу непрерывных функций на B, разделяющую точки B и содержащую тождественную единицу. Если $t \in B$, $U(t)$ окрестность точки t в B и $x \in \mathfrak{N}_+(B)$, то существует $y \in \mathfrak{N}_+(B)$, $y[B \setminus U(t)] \equiv 0$, $y(t) > x(t)$; в этом случае $h = x \wedge y \in \mathfrak{N}_+(B)$ обладает следующими свойствами: $h[B \setminus U(t)] \equiv 0$, $h \equiv x$ для некоторой окрестности $V(t)$ точки t. В дальнейшем любую функцию $h \in \mathfrak{N}_+(B)$, удовлетворяющую этим свойствам, будем обозначать $[t, U(t), x]$.

Если $f: X \to R$, где X-плотное подмножество в B, $t \in X$, то будем говорить, что f *аппроксимируется элементами* $\mathfrak{N}(B)$ *в точке* t, если существуют $u, v \in \mathfrak{N}(B)$, для которых $u|_X \leqq f \leqq v|_X$ и $u(t) = f(t) = v(t)$.

Напомним, что l-группа $\mathfrak{N}(B)$ называется o-полной (соответственно, равномерно полной), если для любой такой последовательности $\{x_n\} \subset \mathfrak{N}(B)$, что $|x_n - x_{n+p}| \leqq V_n \downarrow 0$ (соответственно, $k(n)\,|x_n - x_{n+p}| \leqq \mathbf{1}$, $k(n) \uparrow +\infty$), существует

$z \in \mathfrak{N}(B)$, для которого $|x_n - z| \leqq v_n$ (соответственно $k(n)\,|x_n - z| \leqq \mathbf{1}$); через $o\,\mathfrak{N}(B)$ (соответственно, $E\,\mathfrak{N}(B)$) обозначается o-пополнение (равномерное пополнение) $\mathfrak{N}(B)$.

Через $\Theta(B)$ обозначается семейство всех нигде не плотных нуль-множеств в B. Заметим, что $o\,\mathfrak{N}(B)$ лежит в дедекиндовом пополнении $k\,\mathfrak{N}(B)$, а $k\,\mathfrak{N}(B)$ состоит из классов эквивалентности функций, непрерывных на плотных $B \setminus \bigcup F_n$, где F_n замкнутое нигде не плотное множество в B. Поэтому для описания представителя класса эквивалентности, принадлежащего l-группе $o\,\mathfrak{N}(B)$, можно рассматривать только функции, непрерывные на плотных $B \setminus \bigcup F_n$ в B. Если $f \in C^*(T)$, T плотно в B, то запись $f \in C^*(B \setminus \bigcup\{\theta_n \in \Theta(B)\})$ означает, что f может быть непрерывно продолжено (при необходимости) с T на $B \setminus \bigcup\{\theta_n \in \Theta(B)\}$.

Теорема 1. *Пусть $z \in C^*(T)$, где T плотно в B. Эквивалентны следующие утверждения:*

1) $z \in o\,\mathfrak{N}(B)$; 2) $z \in C^*(B \setminus \bigcup\{\theta_n \in \Theta(B)\}$ *и z аппроксимируется элементами $\mathfrak{N}(B)$ в каждой точке $A(\mathfrak{N}(B), k) \setminus \theta_k$ $(k \in N)$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если $z \in o\,\mathfrak{N}(B)$, то $x_n - u_n \leqq z \leqq x_n + u_n$, где $u_n \downarrow 0$. Положим $\theta_k = \bigcap\{u_n^{-1}[1/k, +\infty] \mid n \in N\} \in \Theta(B)$. Если $t \in T_1 = B \setminus \bigcup\theta_k$, то $u_n(t) \downarrow 0$ и $x_n(t) \to f(t)$. Проверим, что f непрерывно на T_1. Пусть $t \in T_i$ и $\varepsilon > 0$; существует $n_0 \in N$, $3/n_0 < \varepsilon$; далее найдется $n_i \in N$, для которого $u_{n_1}(t) < 1/n_0$; пусть $V(t)$ такая окрестность точки t в B, что $|x_{n_1}(t) - x_{n_1}(p)| < 1/n_0$, $|u_{n_1}(p)| < 1/n_0$ для $p \in V(t)$. Получаем $|f(t) - f(p)| \leqq |f(t) - x_{n_1}(t)| + |x_{n_1}(t) - x_{n_1}(p)| + |x_{n_1}(p) - f(p)| \leqq 3/n_0 < \varepsilon$.

Пусть теперь $t \in A(\mathfrak{N}(B), k) \setminus \theta_k$, тогда найдется $m \in N$, для которого $0 \leqq U_m(t) < 1/_k$, т.е. $u_m(t) = 0$ и $f(t) = (x_m + u_m)(t) = x_m(t) = (x_m - u_m)(t)$; $f \equiv z$ на $T \cap T_1$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть z удовлетворяет условиям 2) $H = B \setminus \bigcup\theta_n$ Считаем, что $z \geqq 0$. Положим

$$T_k = \{t \in B \mid \forall W(t) \in t\ \exists p, q \in H \cap W(t),\ |z(p) - z(q)| \geqq 1/k\}\ .$$

Тогда, $T_k \subset \bigcup\theta_n$ и замкнуто; это означает, что T_k не содержит P'-множеств и может быть погружено в нигде не плотное нуль-множество Γ_k ([5]). Считаем, что $\Gamma_k \supset \theta_k$ и $\Gamma_k = h_k^{-1}(0)$, где $h_k \in C(B)$, $0 \leqq h_k \leqq 1$. Дальнейшее доказательство разобьем на ряд шагов:

1) Обозначим $L(n, m) = \mathrm{cl}\, h_{n+1}^{-1}(1/(m+1), 1]$. Покажем, что для любой точки $t \in L(n, m)$ найдутся $z_t \in \mathfrak{N}_+(B)$, окрестность $V(t) \in t$, для которых $z_t \leqq z$ на H, $z - z_t \leqq 3/n$ на $V(t) \cap H$.

Если $t \in L(n, m) \setminus A(\mathfrak{N}(B), n)$, то найдется такая окрестность $W(t) \ni t$, что для любых $p, q \in W(t) \cap H$ всегда $|z(p) - z(q)| \leqq 1/(n+1)$. Пусть $a = \inf\{z(p) \mid p \in W(t) \cap H\}$. Существует $x_t \in \mathfrak{N}_+(B)$, $0 < x_t(t) \leqq 1/(n+1)$. Пусть k есть целая часть $(a - 1/n)/x_t(t)$, т.е. $a - 1/n \geqq k\,x_t(t) < a - 2/n$. Выберем такую окрестность $U(t) \subset W(t) \setminus A(\mathfrak{N}(B), n)$, на которой $a > kx_t(p) > a - 2/n(p \in U(t))$.

Тогда $[t, U(t), kx_t] \leqq z$. Действительно, если $p \in U(t) \cap H$, то $[t, U(t), kx_t](p) \leqq \leqq k\, x_t(p) < a \leqq z(p)$; если $p \in H \setminus U(t)$, то $[t, U(t), kx_t](p) = 0 \leqq z(p)$. Положим $V(t) = [t, U(t), kx_t]^{-1}(a - 2/n, a) \cap W(t) \ni t$ и $z_t = [t, U(t), kx_t]$. Если $p \in V(t) \cap H$, то $z(p) \leqq a + 1/n \leqq z_t(p) + 3/n$.

Если $t \in L(n, m) \cap A(\mathfrak{N}(B), n)$, то найдется такая окрестность $W(t) \ni t$, на которой для любых $p, q \in H$ всегда $|z(p) - z(q)| \leqq 1/n + 1$. По условию найдутся $u_t, v_t \in \mathfrak{N}(B)$, $u_t|_H \leqq z \leqq v_t|_H$ и $u_t(t) = z(t) = v_t(t)$. Положим $V(t) = W(t) \cap \cap u_t^{-1}(u_t(t) - 1/n, u_t(t) + 1/n) \cap (v_t - u_t)^{-1}[0, 1/n) \ni t$, $z_t = u_t$. Тогда для $p \in \in V(t) \cap H$ имеем

$$0 \leqq z(p) - u_t(p) = z(p) - z(t) + u_t(t) - u_t(p) \leqq 2/n\,.$$

Заметим, что каждое $V(t) \cap A(\mathfrak{N}(B), n) = \emptyset$ для $t \in L(n, m) \setminus A(\mathfrak{N}(B), n)$.

2) Пусть $\{V(t_k) \mid k \leqq k_0\}$ есть конечное покрытие бикомпакта $L(n, m)$ элементами вида $V(t)$. Положим $x_{n,m} = \sup\{z_{t_k} \mid k \leqq k_0\}$. Тогда $x_{n,m} \leqq z$ и $z - x_{n,m} \leqq \leqq 3/n$ на $L(n, m) \cap H$; $x_{n,m} \in \mathfrak{N}(B)$.

3) Покажем, что для любого $t \in L(n, m)$ существуют $g_t \in \mathfrak{N}_+(B)$, окрестность $G(t) \in t$, для которых $g_t \geqq z - x_{n,m}$ на H и $g_t \leqq 7/n$ на $G(t)$.

Если $t \in L(n, m) \setminus A(\mathfrak{N}(B), n)$, то существует такая окрестность $W(t) \ni t$, что $|z(p_1) - z(p_2)| \leqq 1/n (p_1, p_2 \in W(t) \cap H)$ и $|x_{n,m}(q_1) - x_{n,m}(q_2)| \leqq 1/n (q_1, q_2 \in W(t))$, т.е. на $W(t) \cap H$ выполнено $|(x_{n,m} - z)(p) - (x_{n,m} - z)(q)| \leqq 2/n (p, q \in \in W(t) \cap H)$.

Положим $b = \sup\{(z - x_{n,m})(p) \mid p \in W(t) \cap H\}$, тогда $b \leqq 5/n$ т.к. если $p \in W(t) \cap H \cap L(n, m)$, то $(z - x_{n,m})(p) \leqq 3/n$ (по 2); если $p \in W(t) \cap H \setminus L(n, m)$, то $(z - x_{n,m})(p) \leqq (z - x_{n,m})(p_1) + 2/n \leqq 5/n$ (где $p_1 \in W(t) \cap H \cap L(n, m)$); существование точки p_1 обеспечено тем, что $t \in L(n, m) = \operatorname{cl} h_{n+1}^{-1}(1/(m + 1), 1]$ и $W(t) \cap h_{n+1}^{-1}(1/(m + 1), 1] \neq \emptyset$.

Далее существует $x_t \in \mathfrak{N}_+(B)$, для которого $0 < x_t(t) \leqq 1/(n + 1)$. Положим k равным целой части $(b + 1/n)/x_t(t)$, т.е. $b + 2/n < (k + 1)\, x_t(t) < b$. Выберем окрестность $U(t) \ni t$, $U(t) \subset W(t)$, на которой $b + 2/n > (k + 1)\, x_t(p) > b (p \in \in U(t))$. Поскольку $z \in C_+^*(H)$, то $z(q) \leqq r \in N (q \in H)$; найдется $y \in \mathfrak{N}_+(B)$, для которого $y(t) = 0$ и $y[B \setminus U(t)] \equiv r$.

Покажем, что $g_t = y \vee (k + 1)\, x_t \geqq z - x_{n,m}$. Действительно, если $p \in H \cap \cap U(t)$, то $(z - x_{n,m})(p) \leqq b \leqq (k + 1)\, x_t(p) \leqq g_t(p)$; если $p \in H \setminus U(t)$, то $(z - x_{n,m})(p) \leqq r \leqq g_t(p)$. Наконец, положим $G(t) = g_t^{-1}[0, 7/n) \cap U(t) \ni t$, т.к. $g_t(t) = (k + 1)\, x_t(t) < b + 2/n \leqq 7/n$.

Если $t \in L(n, m) \cap A(\mathfrak{N}(B), n)$, тогда $t \in V(t_k)$, причем $t_k \in A(\mathfrak{N}(B), n)$ (по выбору $V(t)$ в 2)). По построению имеем $V(t_k) \subset (v_{t_k} - u_{t_k})^{-1}[0, 1/n)$, $z \leqq v_{t_k}$, $u_{t_k} \leqq x_{n,m}$, т.е. $0 \leqq z - x_{n,m} \leqq v_{t_k} - u_{t_k} = g_t$. Положим $G(t) = g_t^{-1}[0, 1/n) \in t$, тогда g_t и $G(t)$ искомые для этого случая.

4) Пусть $\{G(t_k) \mid k \leqq l_0\}$ конечное покрытие $L(n, m)$ и $g_{n,m} = \inf\{g_{t_k} \mid k \leqq l_0\} \in \in \mathfrak{N}_+(B)$. Тогда $g_{n,m} \geqq z - x_{n,m}$ и $g_{n,m} \leqq 7/n$ на $L(n, m)$. Положим

$$x_k = \sup\{x_{n,m} \mid n, m \leqq k\} \in \mathfrak{N}_+(B)\,, \quad g_k \equiv \inf\{g_{n,m} \mid n, m \leqq k\} \in \mathfrak{N}_+(B)\,.$$

Тогда $|z - x_k| \leqq z - x_{n,m} \leqq g_{n,m}(n, m \leqq k)$, т.е. $|z - x_k| \leqq g_k \downarrow 0$. Остается проверить, что $g_k \downarrow \mathbf{0}$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t \in B \setminus \bigcup h_k^{-1}(0)$. Существует $n_0 \in N$, для которого $\varepsilon/7 > 1/n_0$, и $m_0 \in N$, для которого $t \in L(n_0, m_0)$.

Тогда $g_{k_0}(t) \leqq g_{n_0,m_0}(t) \leqq 7/n_0 < \varepsilon$ (где $k_0 = \max(n_0, m_0)$).

Таким образом $z \in o\,\mathfrak{N}(B)$ и импликация 2) $\Rightarrow$ 1) доказана.

Замечание. При доказательстве 2) $\Rightarrow$ 1) попутно установлен следующий факт: $n|z - y_n| \leqq 7\,\mathbf{1}$ для некоторой $y_n \in C^*(B \setminus \theta_n)$ $(n \in N)$. Действительно, пусть $n \in N$; для каждого $m \in N$ существует $f_m^{(n)} \in \mathfrak{N}(B)$, для которого $f_m^{(n)} \equiv x_{n,m}$ на $h_n^{-1}[1/m; 1/(m-1)]$, $f_m^{(n)} \equiv 0$ на $B \setminus h_n^{-1}(1/(m+1); 1/(m-2))$. Тогда $y_n = \sup\{f_m^{(n)} \mid m \in N\} \in C^*(B \setminus \theta_n)$ и $|y_n - z| \leqq 7/n$ на $B \setminus \theta_n$.

Введем следующее обозначение: $S_\sigma(\mathfrak{N}(B)) = \{f \in C^*(B \setminus \theta) \mid \theta \in \Theta(B),\ \forall t \in B \setminus \theta\ \exists x_t \in \mathfrak{N}(B),\ V(t) \in t\colon x_t|_{V(t)} \equiv f|_{V(t)}\}$.

Таким образом получено следующее утверждение:

Предложение 1. *$o\,\mathfrak{N}(B) \subset E(S_\sigma(\mathfrak{N}(B))$, причем равенство $o\,\mathfrak{N}(B) = E(S_\sigma(\mathfrak{N}(B))$ эквивалентно равномерной полноте $o\,\mathfrak{N}(B)$.*

Замечание. В общем случае $o\,\mathfrak{N}(B) \neq E(S_\sigma(\mathfrak{N}(B)))$.

Предложение 2. *Пусть для любого $n \in N$ существует главная полоса с проекциями $Y_n \subset \mathfrak{N}(B)$, для которой выполнены следующие два условия:*

а) *существует $x_n \in Y_n$, $0 \leqq (n+1)\,x_n \leqq \mathrm{Pr}_{Y_n}\mathbf{1} \leqq (n+2)\,x_n$;*

в) *для $0 < z \in Y_n^d$ всегда $(nz - \mathbf{1})_+ \neq 0$.*

Тогда $o\,\mathfrak{N}(B) = E(S_\sigma(\mathfrak{N}(B)))$.

Доказателство. Покажем, что $A(\mathfrak{N}(B), n)$ открыто замкнуто. Для этого заметим, что $A(\mathfrak{N}(B), n) = (\mathrm{Pr}_{Y_n^d}\mathbf{1})^{-1}(1)$. Действительно, если $t \in A(\mathfrak{N}(B), n) \setminus (\mathrm{Pr}_{Y_n^d}\mathbf{1})^{-1}(1)$, то существует $x_n \in \mathfrak{N}(B)$ из условия а). Тогда $x_n(t) \neq 0$, т.е. $x_n(t) \geqq 1/n$ и $(n+1)\,x_n(t) > 1$; если $t \in (\mathrm{Pr}_{Y_n^d}\mathbf{1})^{-1}(1) \setminus A(\mathfrak{N} \mid B), n)$, то существует $x \in \mathfrak{N}_x(B)$, $x[A(\mathfrak{N}(B), n)] \equiv 0$ и $x(t) = 1$; кроме того, существует $y \in \mathfrak{N}_+(B)$, $0 < y(t) \leqq 1/(n+1)$. Пусть G есть такая окрестность точки t, что $y[G] < (2n+1)/2n(n+2)$. Тогда $z = [t, G, y] \wedge x \in Y_n^d$ и $z(p) < (2n+1)/2n(n+2)$ и $(nz - \mathbf{1}_+ = 0$. Таким образом, $A(\mathfrak{N}(B), n) = (\mathrm{Pr}_{Y_n^d}\mathbf{1})^{-1}(1)$.

Пусть теперь $m(k) \mid u_{k+p} - u_k| \leqq \mathbf{1}$, где $u_k \in S_\sigma(\mathfrak{N}(B))$; всегда можно выбрать подпоследовательность $\{z_n\} \subset \{u_k\}$, т.ч. $2n|z_n - z_{n+p}| \leqq \mathbf{1}$. Если будет доказано, что $z_n \to f \in o\,\mathfrak{N}(B)$, то $u_k \to f$ и $E(S_\sigma(\mathfrak{N}(B))) = o\,\mathfrak{N}(B)$. Имеем $z_{n+p} \equiv z_n$ на $A(\mathfrak{N}(B), n) \setminus (\theta_n \cup \theta_{n+p})$ $(p \in N)$ и поскольку $A(\mathfrak{N}(B), n)$ открыто замкнуто, то можно считать, что $\theta_n \cap A(\mathfrak{N}(B), n) = \theta_{n+p} \cap A(\mathfrak{N}(B), n)$. Обозначим $T = B \setminus \bigcup \theta_n$; если $t \in T$, то $z_n(t) \to f(t)$ и $f \in C^*(T)$. Остается заметить, что $f \equiv z_{n+p} \equiv z_n$ на $A(\mathfrak{N}(B), n) \setminus \theta_n$; из того, что $A(\mathfrak{N}(B), n)$ открыто замкнуто, следует, что f аппроксимируется элементами из в каждой точке $A(\mathfrak{N}(B), n) \setminus \theta_n$.

Замечание 1. Другим условием, при котором $o\,\mathfrak{N}(B) = ES_\sigma(\mathfrak{N}(B))$, является следующее: каждое $A(\mathfrak{N}(B), k)$ можно погрузить в $\Gamma_k \in \Theta(B)$. Это условие можно сформулировать и в терминах l-группы $\mathfrak{N}(B)$.

Замечание 2. $S_\sigma(\mathfrak{N}(B))$ является l-группой (относительно поточечных действий, причем функции, совпадающие на плотных $B \setminus F_n$, отождествляются). Основные свойства $S_\sigma(\mathfrak{N}(B))$ позволяют принять его за секвенциальный аналог дизъюнктного пополнения $S(\mathfrak{N}(B))$ l-группы $\mathfrak{N}(B)$.

Теорема 2. *Пусть* $z \in C_+^*(T)$, *где* T *плотно в* B; $z^d = \{0\}$. *Эквивалентны следующие утверждения:*

1) $z \in S_\sigma(\mathfrak{N}(B))$; 2) *существует полная ограниченная полудизъюнктная последовательность* $\{x_n\} \subset \mathfrak{N}(B)$ (*т.е. для любого* $n \in N$ *множество* $\{m \in N \mid x_m \wedge \wedge x_n \neq 0\}$ *конечно*), *для которой* $z = \sup x_n$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Имеем $z \in C^*(B \setminus \theta)$; пусть $\theta = h^{-1}(0)$, где $h \in C(B)$, $0 \leqq h \leqq \mathbf{1}$. Положим $G_n = h^{-1}[1/(n+2), 1/n]$. Для любого $t \in G_n$ по условию существует $x_t \in \mathfrak{N}(B)$ и окрестность $V(t) \ni t$, для которых $x_t|_{V(t)} \equiv \equiv z|_{V(t)}$ и $V(t) \subset h^{-1}(1/(n+3), 1/(n-1))$. Положим $y_t = [t, V(t), x_t]$, $W(t) = = \operatorname{int}(y_t - x_t)^{-1}(0) \ni t$. Выбираем конечное покрытие $\{W(t_k) \mid k \leqq k_0\}$ бикомпакта G_n и полагаем $x_n = \sup\{y_{t_k} \mid k \leqq k_0\} \in \mathfrak{N}(B)$. Тогда $x_n \leqq z$,

$$x_n[B \setminus h^{-1}(1/(n+3), 1/(n-1))] \equiv 0\,, \quad x_n \mid G_n \equiv z \mid G_n\,.$$

Тогда $\{x_n\}$ искомая система.

2) $\Rightarrow$ 1). Поскольку $\{x_n\}$ полная система, то $\theta = \bigcap\{x_n^{-1}(0) \mid n \in N\} \in \Theta(B)$. Если $t \in B \setminus \theta$, то $\emptyset \neq A(t) = \{n \in N \mid x_n(t) \neq 0\}$ конечно. Тогда $W(t) = = \bigcap\{x_n^{-1}(0, +\infty) \mid n \in A(t)\}$ содержит t и $(\sup x_n)|_{W(t)} \equiv (\sup\{x_n \mid n \in A(t)\})|_{W(t)}$.

Предложение 4. *Если* $\{x_n\}$ *полная ограниченная полудизъюнктная последовательность в* $S_\sigma(\mathfrak{N}(B))$, $x_n \geqq 0$, *то* $\sup x_n \in S_\sigma(\mathfrak{N}(B))$.

Доказательство. Если $h \in N$, то $x_n \in C_+^*(B \setminus \theta_n)$, $\theta_n \in \Theta(B)$; найдется конуль-множество $V_n \subset B$, для которого $V_n \cap (B \setminus \theta_n) = x_n^{-1}(0, +\infty)$. Положим $T_n = = \operatorname{cl} V_n \cap \theta_n$; если $t \in \theta_n \setminus T_n$, то существует такая окрестность этой точки, что $x_n \equiv 0$ на ней, и поэтому можно сказать, что x_n задано и непрерывно на $B \setminus T_n$. Поскольку $\{x_n\}$ полная система, то $\Gamma = B \setminus \bigcup V_n \in \Theta(B)$. Проверим, что $T = = \Gamma \cup \bigcup T_n$ замкнуто. Пусть $t \mathrel{\bar{\in}} T$, тогда $t \in V_{n_0} \setminus \theta_{n_0} \subset x_{n_0}^{-1}(0, +\infty)$, множество $A(n_0) = \{m \in N \mid x_m \wedge x_{n_0} \neq 0\}$ конечно. Найдется окрестность $W(t)$ точки t, для которой $\operatorname{cl} W(t) \cap \bigcup\{T_k \mid k \in A(n_0)\} = \emptyset$, $W(t) \subset V_k \in t$. Покажем, что $W(t) \cap \cap T = \emptyset$. Если $q \in W(t) \cap T$, то $q \in T_n \cap W(t)$ $(n \mathrel{\bar{\in}} A(n_0))$ и $\emptyset \neq V_n \cap W(t) \subset \subset V_n \cap V_{n_0} = \emptyset$ (т.к. $n \mathrel{\bar{\in}} A(n_0)$).

Таким образом, T замкнуто и $T \subset \bigcup \theta_n \cup \Gamma$, т.е. по [4] $T \subset \theta \in \Theta(B)$. А это и означает, что $\sup x_n \in S_\sigma(\mathfrak{N}(B))$.

Замечание. Из теоремы 2 и предложения 4 следует, что $S_\sigma(\mathfrak{N}(B))$ является наименьшей l-группой, содержащей $\mathfrak{N}(B)$ (с сохранением всех граней) и полной относительно взятия счетных супремумов ограниченных полудизъюнктных последовательностей положительных элементов.

Литература

[1] *Papangelou, F.:* Order convergence and topological completion of commutative lattice-groups, Math. Ann., *155*, 1964, p. 81—107.

[2] *Quinn, J.:* Intermediate Riesz spaces, Pacif. Journ. Math., *56*, No 1, 1975, p. 225—263.

[3] *Колдунов, А. В.:* σ-пополнение и o-пополнение $C(B)$ „Функциональный анализ" (Ульяновск), *6*, 1976, 76—84.

[4] *Векслер, А. И., Колдунов А. В.:* Секвенциальная мажорируемость в векторных решетках, „Современная алгебра" (Ленинград), *6*, 1977, 66—85.

[5] *Векслер, А. И., Диканова З. Т.:* P-множества в бикомпактах Π „Функциональный анализ" (Ульяновск), *2*, 1973, 162—170.

[6] *Колдунов, А. В.:* Об одной конструкции o-пополнения архимедовых l-групп с единицей, ДАН Уз. ССР, Но 3, 1979, 10—11.

Адрес автора: ЛГПИ им. А. И. Герцена, Ленинград, 198255, пр. Ветеранов д. 21 кв. 59, СССР.