

Van At Fam

Определение наибольшего собственного значения и соответствующего собственного вектора неотрицательных матриц степенным методом

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 39 (1989), No. 4, 585–588

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102331>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1989

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ  
И СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СОБСТВЕННОГО ВЕКТОРА  
НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ СТЕПЕННЫМ МЕТОДОМ

ФАМ ВАН АТ, Ханой

(Поступило в редакцию 5ого августа 1986)

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $A$  — примитивная неотрицательная  $(n \times n)$ -матрица,  $u^{(0)}$  — неотрицательный  $n$ -мерный вектор,  $u^{(0)} \neq 0$ . Исходя из  $A$  и  $u^{(0)}$  строятся векторная последовательность  $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  и числовая последовательность  $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$  по формулам:

$$(1.1) \quad v^{(k)} = Au^{(k)}, \quad u^{(k)} = (u_1^{(k)}, \dots, u_n^{(k)})^T, \quad v^{(k)} = (v_1^{(k)}, \dots, v_n^{(k)})^T,$$

$$(1.2) \quad \rho_k = \frac{v_1^{(k)} + \dots + v_n^{(k)}}{u_1^{(k)} + \dots + u_n^{(k)}},$$

$$(1.3) \quad u^{(k+1)} = \frac{v^{(k)}}{\|v^{(k)}\|}, \quad \|v^{(k)}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i^{(k)}|.$$

Тогда, как известно (см., например, [2], стр. 174), последовательность  $\{\rho_k\}_{k=0}^{\infty}$  сходится к наибольшему собственному значению  $\rho(A)$  и последовательность  $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  сходится к соответствующему собственному вектору  $u$ . Иначе говоря,

$$(1.4) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho(A),$$

$$(1.5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)} = u, \quad \|u\| = 1,$$

$$(1.6) \quad Au = \rho(A)u.$$

В этой статье доказывается подобный результат для неотрицательных матриц.

2. ГЛАВНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

**Теорема 1.** Пусть  $A$  — неотрицательная  $(n \times n)$ -матрица со всеми положительными диагональными элементами,  $u^{(0)}$  — положительный  $n$ -мерный вектор.

Тогда последовательности  $\{u^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  и  $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ , построенные по (1.1)–(1.3), сходятся и имеют место соотношения (1.4)–(1.6).

**Значение теоремы 1.** Эта теорема утверждает, что если в качестве начального приближения взять любой положительный вектор, то степенной метод всегда приводит к наибольшему собственному значению и соответствующему собственному вектору матрицы  $A = \|a_{ij}\|_1^n \geq 0$  со всеми  $a_{ii} > 0$ . Все эти результаты переносятся на случай любых неотрицательных матриц с учетом, что последняя преобразуется в неотрицательную матрицу со всеми положительными диагональными элементами, если к ней прибавить произвольную положительную скалярную матрицу.

Теорема 1 доказана в § 4.

### 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Исходя из  $A$  строится векторная последовательность  $\{q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  следующим образом:

$$(3.1) \quad a_{ij}^{(0)} = a_{ij}, \quad a_{ij}^{(k+1)} = \frac{a_{ij}^{(k)} s_j^{(k)}}{s_i^{(k)}},$$

$$(3.2) \quad s_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)},$$

$$(3.3) \quad q^{(k)} = (q_1^{(k)}, \dots, q_n^{(k)})^T, \quad q_i^{(k)} = \left( \prod_{t=0}^{k-1} s_i^{(t)} \right) \left[ \max_{1 \leq j \leq n} \left( \prod_{t=0}^{k-1} s_j^{(t)} \right) \right]^{-1}.$$

В [3] было доказано, что

$$(3.4) \quad \|q^{(k)}\| = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|Aq^{(k)} - \varrho(A)q^{(k)}\| = 0.$$

Через  $e$  обозначим  $n$ -мерный вектор, у которого все координаты равны единице:

$$e = (1, \dots, 1)^T.$$

Исходя из  $A$  и  $e$  строится векторная последовательность  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  по формулам:

$$(3.5) \quad x^{(k)} = \frac{A^k e}{\|A^k e\|}, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Лемма 1.** При любом  $k = 1, 2, \dots$ , имеет место равенство:

$$(3.6) \quad x^{(k)} = q^{(k)}.$$

Доказательство. Из (1.1)–(1.3) следует, что

$$(3.7) \quad q_i^{(k+1)} = \frac{q_i^{(k)} s_i^{(k)}}{\max_{1 \leq j \leq n} \{q_j^{(k)} s_j^{(k)}\}},$$

$$(3.8) \quad s_i^{(k)} q_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

По (3.5) имеем

$$(3.9) \quad x_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k)}}{\max_{1 \leq t \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{tj} x_j^{(k)} \right\}}.$$

Пусть для некоторого  $k \geq 1$  имеют место равенства

$$x_i^{(k)} = q_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда из (3.7)–(3.9) следует, что

$$x_i^{(k+1)} = q_i^{(k+1)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

С другой стороны нетрудно проверить, что  $x_i^{(1)} = q_i^{(1)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Поэтому по индукции получим (3.6). Лемма доказана.

Из (3.4) и леммы 1 вытекает следующее следствие.

**Следствие 1.** Последовательность  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  ограничена и ее любая сходящаяся подпоследовательность сходится к собственному вектору матрицы  $A$ , соответствующему  $\varrho(A)$ .

**Лемма 2.** Последовательность  $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$  сходится к собственному вектору матрицы  $A$ , соответствующему  $\varrho(A)$ , т.е.

$$(3.10) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x, \quad \|x\| = 1, \quad Ax = \varrho(A)x.$$

**Доказательство.** Пусть  $A$  имеет  $m$  разных собственных значений, занумерованных в порядке убывания модулей:  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$ . Из того, что  $A \geq 0$  и  $a_{ii} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  нетрудно заметить, что

$$(3.11) \quad \lambda_1 = \varrho(A) > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|.$$

Обозначим через  $E_i$  конервое подпространство матриц  $A$ , соответствующее  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Тогда вектор  $l$  представится единственным образом в виде:

$$(3.12) \quad l = l^{(1)} + l^{(2)},$$

где

$$l^{(1)} \in E_1, \quad l^{(2)} \in H_2 \equiv E_2 \oplus E_3 \oplus \dots \oplus E_m.$$

Докажем, что

$$(3.13) \quad l^{(1)} \neq 0.$$

Действительно, если  $l^{(1)} = 0$ , то  $l \in H_2$ . Следовательно из (3.5) следует, что  $x^{(k)} \in H_2$  для  $\forall k \geq 1$ . Однако это противоречит следствию 1. Наконец, как известно (см. [1], стр. 504), из (3.5), (3.11)–(3.13) можно получить (3.10). Лемма доказана.

#### 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I

Положим

$$U = \text{diag}(u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) > 0,$$

$$B = U^{-1}AU,$$

$$y^{(k)} = \frac{B^k e}{\|B^k e\|},$$

$$\alpha_k = \frac{\|B^k e\|}{\|UB^k e\|} > 0.$$

Тогда из (1.1) и (1.3) следует, что

$$(4.1) \quad u^{(k)} = \alpha_k \cup y^{(k)}, \quad \|y^{(k)}\| = \|u^{(k)}\| = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Согласно лемме 2 имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = y, \quad \|y\| = 1,$$

$$By = \varrho(B)y = \varrho(A)y.$$

Отсюда и из (4.1) получим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)} = u = \frac{Uy}{\|Uy\|},$$

$$Au = \varrho(A)u.$$

Итак получили соотношения (1.5) и (1.6). Наконец из (1.1), (1.2), (1.5) и (1.6) следует (1.4). Теорема доказана.

#### Литература

- [1] Уилкинсон Дж. Х.: Алгебраическая проблема собственных значений, перевод с англ. — „Наука“, М., 1970.
- [2] Маркус М., Минк Х.: Обзор по теории матриц и матричных неравенств, перевод с англ. — „Наука“, М., 1972.
- [3] Фам Ван Ан.: Определение наибольшего характеристического числа и соответствующего ему собственного вектора неотрицательной матрицы. — ЖВМ и МФ, 1981, т. 21, № 4, с. 819—834.