

Shavkat Arifdzhanovich Alimov; Mária Barnovská

О спектральных разложениях, связанных с оператором Шредингера

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 40 (1990), No. 2, 177–181

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102371>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1990

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

О СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ ШРЕДИНГЕРА

Ш. А. АЛИМОВ¹), Москва, М. БАРНОВСКА, Bratislava

Рассмотрим в n -мерном евклидовом пространстве R^n ($n > 3$) гладкие многообразия $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_l$, $\dim \mathcal{S}_k \leq n - 3$, каждое из которых однозначно проектируется на некоторую гиперполоскость. Это означает, что для каждого такого многообразия \mathcal{S} размерности $n - m$ ($3 \leq m < n$) существует аффинное преобразование R^n , приводящее \mathcal{S} к виду

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{(x, y) \in R^n: x = \varphi(y)\}.$$

В этой записи $x \in R^m$, $y \in R^{n-m}$, $\varphi \in C^1(R^{n-m} \rightarrow R^m)$, причем $|\nabla \varphi(y)| \leq \text{const}$ равномерно по всем $y \in R^{n-m}$.

Пусть $S = \bigcup \mathcal{S}_k$ и пусть $q(x)$ — функция из $C^\infty(R^n \setminus S)$, удовлетворяющая условию

$$(1) \quad |q(x)| \leq \frac{\text{const}}{\text{dist}(x, S)}.$$

Обозначим символом H эллиптический формально самосопряженный оператор Шредингера с потенциалом $q(x)$:

$$H = -\Delta + q(x).$$

Оператор H с областью определения $C_0^\infty(R^n)$ является полуограниченным и по теореме Фридрикса (см. [1], гл. 8, § 3) имеет самосопряженное расширение, которое мы обозначим \hat{H} . Как известно (см. [1]),

$$D(\hat{H}) = D(H^*) \cap D_0,$$

где D_0 — замыкание $C_0^\infty(R^n)$ по энергетической норме

$$\|f\|_* = \sqrt{(H_\mu f, f)},$$

в которой $H_\mu = H + \mu I$, а μ — достаточно большое положительное число. Согласно теореме Дж. фон Неймана (см. [1], гл. 8, § 2) оператор \hat{H} обладает разложением единицы E_λ и представляется в виде:

$$\hat{H} = \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda dE_\lambda,$$

где λ_0 — нижняя грань спектра оператора \hat{H} .

¹) Совместная работа возникла во время пребывания проф. Ш. А. Алимова в мае 1983 в Братиславе по плану сотрудничества между Московским университетом им. Ломоносова и Братиславским университетом им. Коменского.

В настоящей статье изучается поведение спектральных разложений $E_\lambda f$ функций из классов Соболева $H^s(R^n) \equiv H_2^s(R^n)$ (определение этих классов см., например, в [2]).

Теорема. Пусть $0 \leq s \leq 1$. Тогда для любой функции $f \in H^s(R^n)$ выполняется равенство:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|E_\lambda f - f\|_{H^s(R^n)} = 0.$$

Доказательство теоремы опирается на свойства дробных степеней оператора \hat{H} , которые могут представлять самостоятельный интерес.

Лемма 1. Для любой функции $f \in C_0^\infty(R^m)$ ($m \geq 2$) выполняется оценка:

$$(2) \quad \int_{R^m} \frac{|f(x)|^2}{|x|} dx \leq \text{const} \int_{R^m} |f(x)| |\nabla f(x)| dx.$$

Доказательство. Введем сферические координаты $x = (r, \theta)$ и воспользуемся следующим равенством:

$$|f(x)|^2 = -2 \int_r^\infty f(t, \theta) \frac{\partial f(t, \theta)}{\partial t} dt.$$

Разделив обе части этого равенства на $|x|$ и проинтегрировав по R^m , получим:

$$\int_{R^m} \frac{|f(x)|^2}{|x|} dx = -2 \int_\theta^\infty d\theta \int_0^\infty r^{m-2} dr \int_r^\infty f(t, \theta) \frac{\partial f(t, \theta)}{\partial t} dt.$$

После изменения порядка интегрирования равенство примет вид:

$$\int_{R^m} \frac{|f(x)|^2}{|x|} dx = -\frac{2}{m-1} \int_{R^m} f(x) \left(\frac{x}{|x|} \nabla f(x) \right) dx.$$

Отсюда очевидным образом следует оценка (2).

Лемма 2. Для любой функции $f \in C_0^\infty(R^n)$ выполняется оценка:

$$(3) \quad |(qf, f)| \leq \text{const} \|f\|_{L_2} \|\nabla f\|_{L_2}.$$

Доказательство. Достаточно доказать лемму 2 для случая, когда S является многообразием размерности $n - m$ вида

$$S = \{(x, y) \in R^n: x = \varphi(y)\},$$

где $x \in R^m$, $y \in R^{n-m}$, $\varphi \in C^1(R^{n-m} \rightarrow R^m)$.

Нетрудно видеть, что из условия $|\nabla f(y)| \leq \text{const}$ следует оценка

$$|x - \varphi(y)| \leq \text{const} \text{dist}((x, y), S).$$

Из этой оценки и условия (1) получаем неравенство

$$(4) \quad |(qf, f)| \leq \text{const} \int_{R^{n-m}} dy \int_{R^m} \frac{|f(x, y)|^2}{|x - \varphi(y)|} dx.$$

Обозначим внутренний интеграл через $F(y)$, т.е.

$$F(y) = \int_{R^m} \frac{|f(x, y)|^2}{|x - \varphi(y)|} dx.$$

Сделав замену переменных $z = x - \varphi(y)$, преобразуем этот интеграл к виду

$$F(y) = \int_{R^m} \frac{|f(z + \varphi(y), y)|^2}{|z|} dz.$$

Далее оценим его с помощью леммы 1:

$$F(y) \leq \frac{2}{m-1} \int_{R^m} |f(z + \varphi(y), y)| \cdot |\nabla f(z + \varphi(y), y)| dz.$$

Произведем обратную замену $x = z + \varphi(y)$:

$$F(y) \leq \frac{2}{m-1} \int_{R^m} |f(x, y)| \cdot |\nabla f(x, y)| dx.$$

Интегрируя это неравенство по $y \in R^{n-m}$ и подставляя в правую часть (4), получим

$$|(qf, f)| \leq \text{const} \int_{R^n} |f(x)| \cdot |\nabla f(x)| dx.$$

Для завершения доказательства леммы 2 остается применить неравенство Коши-Буняковского.

Следствие 1. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f \in C_0^\infty(R^n)$ выполняется оценка:

$$(5) \quad |(qf, f)| \leq \varepsilon \|\nabla f\|_{L_2(R^n)} + C(\varepsilon) \|f\|_{L_2(R^n)}.$$

Следствие 2. Оператор H является существенно самосопряженным (см. [3], X.2).

Лемма 3. При достаточно больших значениях $\mu > 0$ для всех функций $f \in C_0^\infty(R^n)$ выполняются неравенства:

$$(6) \quad C_1(\mu) \|f\|_{H^1(R^n)}^2 \leq (H_\mu f, f) \leq C_2(\mu) \|f\|_{H^1(R^n)}^2.$$

Доказательство. Пусть $f \in C_0^\infty(R^n)$. Тогда

$$(H_\mu f, f) = (\nabla f, \nabla f) + (qf, f) + (\mu f, f) = \|\nabla f\|_{L_2}^2 + \mu \|f\|_{L_2}^2 + (qf, f).$$

Из этого равенства и оценки (5) уже нетрудно получить неравенства (6). Так как правое из неравенств (6) очевидно, покажем, как получить левое неравенство:

$$\begin{aligned} (H_\mu f, f) &\geq \|\nabla f\|_{L_2}^2 + \mu \|f\|_{L_2}^2 - |(qf, f)| \geq \\ &\geq (1 - \varepsilon) \|f\|_{L_2}^2 + [\mu - C(\varepsilon)] \|f\|_{L_2}^2 \geq C_1(\mu) \|f\|_{H^1(R^n)}^2. \end{aligned}$$

Следствие 3. $D(\hat{H}) \subset H^1(R^n)$.

Для дальнейшего нам понадобится положительный квадратный корень из оператора \hat{H} . Фиксируем достаточно большое число $\mu > 0$ и определим с помощью спектрального разложения оператор

$$\hat{H}_\mu^{1/2} = \int_{\lambda_0}^{\infty} \sqrt{\lambda + \mu} dE_\lambda.$$

Лемма 4. Для любой функции $f \in H^1(R^n)$ выполняются неравенства:

$$(7) \quad C_1(\mu) \|f\|_{H^1(R^n)} \leq \|\hat{H}_\mu^{1/2} f\|_{L_2(R^n)} \leq C_2(\mu) \|f\|_{H^1(R^n)}.$$

Доказательство. Из определения класса $H^1(R^n)$ следует, что оценку (7) достаточно доказать в предположении, что $f \in C_0^\infty(R^n)$. Итак, пусть $f \in C_0^\infty(R^n)$. Тогда

$$\|\hat{H}_\mu^{1/2} f\|_{L_2(R^n)}^2 = (\hat{H}_\mu f, f) = (H_\mu f, f),$$

и требуемая оценка (7) следует из леммы 3.

Лемма 5. Для любого $\lambda \geq \lambda_0$ и любой функции $f \in H^1(R^n)$ выполняется неравенство:

$$(8) \quad \|E_\lambda f\|_{H^1(R^n)} \leq \text{const} \|f\|_{H^1(R^n)}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что согласно следствию 3 для любой функции $f \in L_2(R^n)$ и любого $\lambda \geq \lambda_0$ имеет место включение $E_\lambda f \in H^1(R^n)$. Следовательно, к функции $E_\lambda f$ можно применить лемму 4 и в результате получить оценку

$$\|E_\lambda f\|_{H^1(R^n)} \leq \text{const} \|\hat{H}_\mu^{1/2} E_\lambda f\|_{L_2(R^n)}.$$

Далее воспользуемся тем, что операторы $\hat{H}_\mu^{1/2}$ и E_λ коммутируют и норма проектора E_λ в $L_2(R^n)$ равна 1. Тогда получим:

$$\|E_\lambda f\|_{H^1(R^n)} \leq \text{const} \|E_\lambda \hat{H}_\mu^{1/2} f\|_{L_2(R^n)} \leq \text{const} \|\hat{H}_\mu^{1/2} f\|_{L_2(R^n)}.$$

Последняя величина оценивается с помощью правого из неравенств (7).

Лемма 6. Для любого s из промежутка $0 \leq s \leq 1$ и любой функции $f \in H^s(R^n)$ выполняется оценка:

$$(9) \quad \|E_\lambda f\|_{H^s(R^n)} \leq \text{const} \|f\|_{H^s(R^n)}.$$

Доказательство. Заметим, что при $s = 0$ оценка (9) выполняется с $\text{const} = 1$, а при $s = 1$ она совпадает с (8). В таком случае, интерполируя эти две оценки (см. [2]), мы получим требуемую оценку (9) при всех $0 \leq s \leq 1$.

Доказательство теоремы. Докажем вначале теорему при $s = 1$. Проводя рассуждения, аналогичные использованным в лемме 6, мы получим для любой функции $f \in H^1(R^n)$ оценку

$$(10) \quad \begin{aligned} \|E_\lambda f - f\|_{H^1(R^n)} &\leq \text{const} \|\hat{H}_\mu^{1/2} (E_\lambda - I)\|_{L_2} = \\ &= \text{const} \|(E_\lambda - I) \hat{H}_\mu^{1/2} f\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 4 функция $\hat{H}_\mu^{1/2}f$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$, а тогда по свойству разложения единицы норма в правой части (10) стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Тем самым, при $s = 1$ теорема доказана.

Если $s < 1$, то утверждение теоремы следует из оценки (9) и из того, что пространство $H^1(\mathbb{R}^n)$ плотно в $H^s(\mathbb{R}^n)$.

В заключение отметим, что доказанная теорема охватывает потенциалы, возникающие при описании движения нескольких взаимодействующих частиц (см., например, [3]).

Литература

- [1] Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь: Лекции по функциональному анализу, „Мир“, Москва, 1979.
- [2] Х. Трибель: Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы, „Мир“, Москва, 1980.
- [3] М. Рид, Б. Саймон: Методы современной математической физики, 2, „Мир“, Москва, 1978.

Адрес автора: Ш. А. Алимов: СССР, 117 234 Москва, В-234 Ленинские горы МГУ, Факультет ВМиК, Кафедра общей математики; М. Варновскá: Katedra matematickej analýzy Matematicko-fyzikálnej fakulty UK, Mlynská dolina, 842 15 Bratislava, Czechoslovakia.