Czechoslovak Mathematical Journal

Zdeněk Hustý

Die höheren Ableitungen zusammengesetzter Funktion

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 40 (1990), No. 3, 528–533

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102405

Czechoslovak Mathematical Journal, 40 (115) 1990, Praha

DIE HÖHEREN ABLEITUNGEN ZUSAMMENGESETZTER FUNKTION

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingengangen am 23. Dezember 1988)

In der Arbeit wird die Formel für die explizite Berechnung der k-ten Ableitung zusammengesetzter Funktion nachgewiesen, $k \geqq 2$.

1. DIE ERWEITERUNG DER FORMEL VON SCHLÖMILCH

Es sei $z(t) \in \mathscr{C}^n(I_2)$, $T(x) \in \mathscr{C}^n(I_1)$, wobei I_1, I_2 die Intervalle sind. Es sei ferner $T(I_1) = I_2$, $T' \neq 0$ in I_1 und es haben die Funktionen z, T' die Dimension 0. (Der Begriff der Dimension ist in [1; I. Teil, S. 481] erklärt.)

1.1 Satz. *Ist* $y = z \circ T$, *so ist*

$$y^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \varphi_j^k(T')\, z^{(h-j)} \circ T\,, \tag{1.1}$$

wo φ_j^k *das k-te Polynom des Elementes* T' *mit Dimension j ist; es ist die homogene Funktion* $(k - j)$*-tes Grades und befriedigt die Differenzengleichung*

$$\varphi_j^{k+1} = T'\varphi_j^k + (\varphi_{j-1}^k)\,, \quad \varphi_j^j = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad j = 0 \\ 0 & \textit{für} \quad j > 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\varphi_{k+\nu}^k = \varphi_{-\nu}^k = 0\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,; \quad j = 0, 1, \ldots, k\,; \quad \nu = 1, 2, \ldots.$$

Der Beweis wird mittels Induktion in bezug auf k durchgeführt.

1.2. Die Formel von Schlömilch (siehe [2; S. 4—5]).

$$\varphi_{k-j}^k = \frac{1}{j!} \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\varrho^k} [T(x + \varrho) - T(x)]^j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, k\,. \tag{1.3}$$

Beweis. Es sei $z(t) = t^k$, $k \geqq 1$, so dass $y = T^k$. Nach (1.1) ist

$$y^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} k^{[j]} t^{k-j}\, \varphi_{k-j}^k(T') \circ T\,, \tag{1.4}$$

wo $k^{[j]} = k(k - 1) \ldots (k - j + 1)$. Setzen wir $T(x + \varrho) - T(x) = \alpha(x, \varrho)$. Dann

$$y^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} [T(x)]^k = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\varrho^k} [T(x + \varrho)]^k =$$

$$= \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\varrho^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} T(x)^{k-j} \alpha(x, \varrho)^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} t^{k-j} \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\varrho^k} \alpha(x, \varrho)^j \circ T.$$

Wenn wir diese Gleichung mit (1.4) vergleichen, erhalten wir (1.3).

1.3. Bemerkung. Laut (1.3) schliessen wir, dass für $j > k$

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\varrho^k} [T(x + \varrho) - T(x)]^j = 0 \tag{1.5}$$

gilt. Die Gleichung (1.5) lässt sich unabhängig von (1.3) mittels Induktion in bezug auf j beweisen.

1.4. *Es gilt*

$$\varphi_{k-j}^k = \frac{1}{j!} \sum_{v=0}^{j} \binom{j}{v} (-1)^{j-v} T(x)^{j-v} [T(x)^v]^{(k)}. \tag{1.6}$$

Beweis. Es ist

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\varrho^k} [T(x + \varrho) - T(x)]^j =$$

$$= \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\varrho^k} \sum_{v=0}^{j} \binom{j}{v} (-1)^{j-v} T(x)^{j-v} T(x + \varrho)^v =$$

$$= \sum_{v=0}^{j} \binom{j}{v} (-1)^{j-v} T(x)^{j-v} \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\varrho^k} T(x + \varrho)^v =$$

$$= \sum_{v=0}^{j} \binom{j}{v} (-1)^{j-v} T(x)^{j-v} [T(x)^v]^{(k)}.$$

Wenn wir dieses Ergebnis in (1.3) einsetzen, erhalten wir (1.6).

Bemerkungen.

a) Beachten wir, dass die Funktion

$$\varphi_j^k = \frac{1}{(k-j)!} \sum_{v=0}^{k-j} \binom{k-j}{v} (-1)^{k-j-v} T^{k-j-v} (T^v)^{(k)}$$

die partikuläre Lösung der Gleichung (1.2) mit der Anfangsbedingung $\varphi_j^j = 0$, $j > 0$ ist.

b) Aus (1.6) ergibt sich für $k \geqq 1$, $j = 0, 1, 2$ $\varphi_k^k = 0$, $\varphi_{k-1}^k = T^{(k)}$, $\varphi_{k-2}^k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} T^{(k-j)} T^{(j)}$. Wenn $k = 2i$ resp. $k = 2i + 1$, dann $\varphi_{2(i-1)}^{2i} = \binom{2i-1}{i-1} \cdot [T^{(i)}]^2 + \sum_{s=1}^{i-1} \binom{2i}{i-s} T^{i-s} T^{(i+s)}$, $\varphi_{2i-1}^{2i+1} = \sum_{s=0}^{i-1} \binom{2i+1}{i-s} T^{(i-s)} T^{(i+s+1)}$.

c) Für $j = 0, 1, 2, 3$ erhalten wir aus (1.2) die folgenden Formeln

$$\varphi_0^k = (T')^k, \tag{1.7}$$

$$\varphi_1^k = \binom{k}{1}(T')^{k-1}\left(\frac{k-1}{2}\frac{T''}{T'}\right),$$

$$\varphi_2^k = \binom{k}{2}(T')^{k-2}\left[\frac{(k-2)^{[2]}}{4}\left(\frac{T''}{T'}\right)^2 + \frac{k-2}{3}\frac{T'''}{T'}\right],$$

$$\varphi_3^k = \binom{k}{3}(T')^{k-3}\left[\frac{(k-3)^{[3]}}{8}\left(\frac{T''}{T'}\right)^3 + \frac{(k-3)^{[2]}}{2}\frac{T''}{T'}\frac{T'''}{T'} + \right.$$
$$\left. + \frac{k-3}{4}\frac{T^{(4)}}{T'}\right].$$

2. DIE EXPLIZITE FORMEL

Laut (1.6), (1.7) schliessen wir, dass die Gleichung $(T^k)^{(k)} = k!\,(T')^k + + \sum_{\nu=0}^{k-1}\binom{k}{\nu}(-1)^{k-\nu+1}T^{k-\nu}(T^\nu)^{(k)}$ gilt. Wir verallgemeinern diese Gleichung.

2.1. Für $j \geqq 2$, $k \geqq 2$ gelten die folgenden Formeln:

$$\sum_{\nu=\delta}^{\varepsilon}\binom{j}{\nu}(-1)^{j-\nu} = \delta(-1)^{j+1} + \varepsilon - j\,, \quad \delta = 0, 1\,; \quad \varepsilon = j-1, j\,. \tag{2.1}$$

$$\sum_{s=1}^{k-1}\binom{k}{s}T^{(-s)}\sum_{\nu=1}^{j-1}\binom{j}{\nu}(-1)^{j+1-\nu}T^{j-\nu}(T^\nu)^{(s)} = \tag{2.2}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{j}\binom{j+1}{\nu}(-1)^{j+2-\nu}T^{j+1-\nu}(T^\nu)^{(k)} - T^{(k)}T^j - T(T^j)^{(k)}\,.$$

Die Formel (2.1) ist klar. Die als $f(T)$ bezeichnete Summe an der linken Seite der Formel (2.2) kann folgendermassen umformt werden:

$$f(T) = \sum_{\nu=1}^{j-1}\binom{j}{\nu}(-1)^{j+1-\nu}T^{j-\nu}\sum_{s=1}^{k-1}\binom{k}{s}T^{(k-s)}(T^\nu)^{(s)} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{j-1}\binom{j}{\nu}(-1)^{j+1-\nu}T^{j-\nu}[(T^{\nu+1})^{(k)} - T^{(k)}T^\nu - T(T^\nu)^{(k)}] =$$
$$= \sum_{\nu=2}^{j}\binom{j}{\nu-1}(-1)^{j+2-\nu}T^{j+1-\nu}(T^\nu)^{(k)} + T^{(k)}T^j\sum_{\nu=1}^{j-1}\binom{j}{\nu}(-1)^{j-\nu} +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{j-1}\binom{j}{\nu}(-1)^{j+2-\nu}\,T^{j+1-\nu}(T^\nu)^{(k)} =$$
$$= \sum_{\nu=1}^{j}\left[\binom{j}{\nu-1} + \binom{j}{\nu}\right](-1)^{j+2-\nu}\,T^{j+1-\nu}(T^\nu)^{(k)} - T^{(k)}T^j - T(T^j)^{(k)}.$$

Daraus ergibt sich leicht (2.2).

2.2. Setzen wir für $j \geqq 2$, $k \geqq 2$

$$\tag{2.3} \overset{j-1}{\underset{1}{S}}(s_i, k) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad j > k\,, \\ \sum\limits_{s_1=j-1}^{s_0-1} \sum\limits_{s_2=j-2}^{s_1-1} \cdots \sum\limits_{s_{j-1}=1}^{s_{j-2}-1} \prod\limits_{v=1}^{j} \binom{s_{v-1}}{s_v} T^{(s_{v-1}-s_v)} \quad \text{für } j \leqq k\,, \\ s_0 = k\,, \quad s_j = 0\,. \end{cases}$$

Dann ist für $j \leqq k - 1$

$$\overset{j}{\underset{1}{S}}(s_i, k) = \sum_{s_1=j}^{k-1} \binom{k}{s_1} T^{(k-s_1)} \sum_{s_2=j-1}^{s_1-1} \sum_{s_3=j-2}^{s_2-1} \cdots \sum_{s_j=1}^{s_{j-1}-1} \prod_{v=2}^{j+1} \binom{s_{v-1}}{s_v} T^{(s_{v-1}-s_v)}$$

wobei $s_{j+1} = 0$ gleichgesetzt wird. Wenn wir in den Summen s_{v-1} anstatt s_v schreiben, erhalten wir

$$\overset{j}{\underset{1}{S}}(s_i, k) = \sum_{s=j}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} \sum_{s_1=j-1}^{s-1} \sum_{s_2=j-2}^{s_1-1} \cdots \sum_{s_{j-1}=1}^{s_{j-2}-1} \prod_{v=1}^{j} \binom{s_{v-1}}{s_v} T^{(s_{v-1}-s_v)},$$

$$s_0 = s\,, \quad s_j = 0\,,$$

d.h.

$$\tag{2.4} \overset{j}{\underset{1}{S}}(s_i, k) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad j > k - 1\,, \\ \sum\limits_{s=j}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} \overset{j-1}{\underset{1}{S}}(s_i, s) \quad \text{für} \quad j \leqq k - 1\,. \end{cases}$$

2.3. Hilfssatz. *Für $j \geqq 2$, $k \in N$ gilt*

$$\tag{2.5} (T^j)^{(k)} = \sum_{v=1}^{j-1} \binom{j}{v} (-1)^{j+1-v}\, T^{j-v} (T^v)^{(k)} + \overset{j-1}{\underset{i=1}{S}}(s_i, k)\,,$$

wobei für $j > k$ $\overset{j-1}{\underset{i=1}{S}}(s_i, k) = 0$ gleichgesetzt wird.

Der B e w e i s wird mittels Induktion in bezug auf j durchgeführt. Nach (2.5) ist $(T^2)' = 2TT'$. Für $k \geqq 2$ erhalten wir aus (2.5)

$$(T^2)^{(k)} = 2TT^{(k)} + \sum_{s_1=1}^{k-1} \binom{k}{s_1} T^{(k-s_1)} T^{(s_1)} = \sum_{s_1=0}^{k} \binom{k}{s_1} T^{(k-s_1)} T^{(s_1)}\,,$$

so dass (2.5) für $j = 2$, $\forall k \in N$ in Kraft ist. Es gilt (2.5) für $j = 2$, $\forall k \in N$. Mit Hilfe der Berechnung überzeugt man sich leicht, dass die Gleichung

$$(T^{j+1})' = \sum_{v=1}^{j} \binom{j+1}{v} (-1)^{j+2-v}\, T^{j+1-v} (T^v)'$$

gilt. Es sei $k \geqq 2$. Dann ist laut (2.5)

$$(T^{j+1})^{(k)} = T^{(k)} T^j + T(T^j)^{(k)} + \sum_{s=1}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} (T^j)^{(s)} =$$

$$= T^{(k)} T^j + T(T^j)^{(k)} + \sum_{s=1}^{k-1} \binom{k}{s} T^{(k-s)} \sum_{v=1}^{j-1} \binom{j}{v} (-1)^{j+1-v} (T^v)^{(s)} +$$

$$+\sum_{s=j}^{k-1}\binom{k}{s}T^{(k-s)}\overset{j-1}{\underset{1}{S}}(s_i, s),$$

wobei die letzte Summe für $j > k - 1$ Null gleicht.

Nach (2.2), (2.4) ist

$$(T^{j+1})^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{j}\binom{j+1}{\nu}(-1)^{j+2-\nu}\,T^{j+1-\nu}(T^{\nu})^{k} + \overset{j}{\underset{1}{S}}(s_i, k)$$

wobei für $j + 1 > k$ $\overset{j}{\underset{i=1}{S}}(s_i, k) = 0$ ist. Hilfssatz 2.3 ist bewiesen.

2.4. Satz. *Es ist*

$$\varphi_k^k = \left\langle\begin{matrix}1 & \textit{für} & k = 0\\ 0 & \textit{für} & k > 0\end{matrix}\right., \quad \varphi_{k-1}^k(T') = T^{(k)} \quad \textit{für} \quad k \geqq 1. \tag{2.6}$$

Ist $k \geqq 2$, $1 < j \leqq k$, *dann*

$$\varphi_{k-j}^k(T') = \frac{1}{j!}\overset{j-1}{\underset{i=1}{S}}(s_i, k). \tag{2.7}$$

Beweis. Laut Bemerkung 1.4 b) gilt (2.6). Für $k \geqq 2$, $1 < j \leqq k$ ist gemäss (1.6)

$$\varphi_{k-j}^k = \frac{1}{j!}\left[\sum_{\nu=1}^{j-1}\binom{j}{\nu}(-1)^{j-\nu}\,T^{j-\nu}(T^{\nu})^{(k)} + (T^{j})^{(k)}\right].$$

Nach (2.5) gilt (2.7).

2.5. Der Satz über die k-te Ableitung zusammengesetzter Funktion. Es sei $z(t) \in \in \mathscr{C}^n(I_2)$, $T(x) = \mathscr{C}^n(I_1)$, $T(I_1) = I_2$, $T' \neq 0$ in I_1. Dann ist für $k \geqq 2$

$$(z \circ T)^{(k)} = T^{(k)}z' \circ T + \sum_{j=2}^{k}\frac{1}{j!}\overset{j-1}{\underset{i=1}{S}}(s_i, k)\,z^{(j)} \circ T.$$

Es folgt aus den Sätzen 1.1 and 2.4

2.6. Laut (2.4) ist $2 < j \leqq k - 1$

$$\varphi_{k-j}^k = \frac{1}{j!}\sum_{s=j-1}^{k-1}\binom{k}{s}T^{(k-s)}\overset{j-2}{\underset{i=1}{S}}(s_i s) = \frac{1}{j}\sum_{s=j-1}^{k-1}\binom{k}{s}T^{(k-s)}\varphi_{s-j+1}^{s} =$$

$$= \frac{1}{j}\sum_{\nu=0}^{k-j}\binom{k}{j-1+\nu}T^{(k-j+1-\nu)}\varphi_{\nu}^{j-1+\nu}$$

resp.

$$\varphi_j^k = \frac{1}{k-j}\sum_{\nu=0}^{j}\binom{k}{j+1-\nu}T^{(j+1-\nu)}\varphi_{\nu}^{k-j-1+\nu}.$$

2.7. Für $j \leqq k$ ist

$$\overset{j-1}{\underset{i=1}{S}}(s_i, k) = (T')^{j}\sum_{s_1=j-1}^{s_0-1}\cdots\sum_{s_{j-1}=1}^{s_{j-2}-1}\prod_{v=1}^{j}\binom{s_{v-1}}{s_v}\frac{T^{(s_{v-1}-s_v)}}{T'}.$$

Setzen wir $T''/T' = \eta$. Dann ist für $s \geqq 2$ $T^{(s)}/T' = \varphi_{s-1}(\eta)$, wobei $\varphi_{s-1}(\eta)$ das Polynom des Elementes η mit Dimension $s - 1$ ist. Die Funktion φ_{s-1} ist eine Lösung der Differenzengleichung $\varphi_{s-1} = \eta\varphi_{s-2} + (\varphi_{s-2})'$, $\varphi_0 = 1$.

Literatur

[1] *Hustý Z.*: Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höheren als der zweiten Ordnung, I. Teil, Czechoslovak Math. J. *15 (90)*, 1965, 479—502.

[2] *Schlömilch O.*: Compendium der höheren Analysis, II. Band, Braunschweig 1866.

Anschrift des Verfassers: 616 62 Brno, Žižkova 22, Tschechoslowakei (Ústav fyzikální metalurgie ČSAV).