

Aplikace matematiky

Jiří Dráský

Příspěvek k teorii tvoření vírů v kapalinách

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 4, 276–295

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102534>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

PŘÍSPĚVEK K THEORII TVOŘENÍ VÍRŮ V KAPALINÁCH

JIRÍ DRÁSKÝ

(Pokračování.)

9. Rychlostní pole v okolí koncových singulárních bodů dvojité hranice

Na základě výsledků z předešlých statí se pokusíme vyšetřit jako první zvláštní případ možného nestacionárního proudění, při němž jsou splněny všechny nutné fyzikální podmínky, rychlostní pole v okolí koncových singulárních bodů dvojité hranice.

Komplexní potenciál, příslušný rychlostnímu poli v okolí koncového singulárního bodu \mathbf{a} dvojité hranice, předpokládáme ve tvaru součtu

$$W = W_0 + W_i, \quad (9,1)$$

při čemž značí

W výsledný komplexní potenciál v okolí bodu,

W_0 komplexní potenciál v okolí bodu \mathbf{a} , příslušný algebraické singularitě v bodě \mathbf{a} ,

W_i komplexní potenciál v okolí bodu \mathbf{a} , příslušný logaritmické singularitě v bodě \mathbf{a} .

Nejprve vyšetříme složku komplexního potenciálu, příslušnou algebraické singularitě v bodě \mathbf{a} .

Koncový bod složené hranice představuje — po matematické stránce — koncový bod integrační čáry integrálu typu Cauchyho. Lze tudíž při vyšetřování komplexního potenciálu užít odvození, kterého používá MUSCHELIŠVILI [7] pro vyšetřování vlastností integrálu typu Cauchyho u konců otevřených integračních čar a které je v následujícím odstavci stručně uvedeno:

Volme v rovině \mathbf{z} libovolnou otevřenou čáru L s koncovými body \mathbf{a} resp. \mathbf{b} . Dejme každému bodu ζ čáry L obložení $(\zeta - \mathbf{a})^\gamma$, při čemž mocnitel γ je komplexní $\gamma = \alpha + i\beta$ a splňuje podmínky $0 < \alpha \leq 1$, $\beta \neq 0$. Za těchto předpokladů vyšetřme hodnotu křivočarého integrálu (obr. 18)

$$\Omega(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\zeta - \mathbf{a})^\gamma}{\zeta - \mathbf{z}} d\zeta \quad (9,2)$$

podél čáry L . Při uvedeném omezení exponentu α vyhovuje funkce $(\zeta - a)^\gamma$ podmínce Lipschitzově. Podle formulí Plemeljových platí

$$\Omega^+(\zeta_0) - \Omega^-(\zeta_0) = -(\zeta_0 - a)^\gamma. \quad (9,3)$$

Zde značí ζ_0 libovolně vybraný bod na čáře L , $\Omega^+(\zeta_0)$ hodnotu výrazu (9,2) na pravé straně čáry L při postupu po čáře od bodu a k bodu b , $\Omega^-(\zeta_0)$ hodnotu výrazu (9,2) na levé straně čáry L .

Pro funkci $-(z - a)^\gamma$, jednoznačnou poblíž bodu a na rozříznuté rovině podél $L \equiv \widehat{ab}$ a přijímající na pravé straně čáry L hodnoty $-(\zeta - a)^\gamma$, patrně platí

$$\begin{aligned} [-(\zeta - a)^\gamma]^+ - [-(\zeta - a)^\gamma]^- &= \\ &= (1 - e^{-2\pi i \gamma}) [-(\zeta - a)^\gamma]^+. \end{aligned} \quad (9,4)$$

Položíme-li tudíž

$$\omega(z) = \frac{-(z - a)^\gamma}{1 - e^{-2\pi i \gamma}},$$

vychází

$$[\Omega - \omega]^+ = [\Omega - \omega]^-. \quad (9,5)$$

a proto funkce $(\Omega(z) - \omega(z))$ je holomorfní v okolí bodu a , t. j. v tomto okolí platí rozvoj

$$\Omega(z) = \frac{-1}{1 - e^{-2\pi i \gamma}} (z - a)^\gamma + A_0 + A_1(z - a) + \dots \quad (9,6)$$

Pro body ζ ležící na čáře L platí

$$\Omega^+(\zeta) + \Omega^-(\zeta) = 2\Omega(\zeta); \quad (9,7)$$

odtud vychází

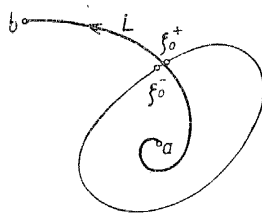
$$\Omega(\zeta) = -\frac{1}{2} \frac{1 + e^{-2\pi i \gamma}}{1 - e^{-2\pi i \gamma}} (\zeta - a)^\gamma + A_0 + A_1(\zeta - a) + \dots \quad (9,8)$$

Z uvedeného odvození vyplývá, že integrál typu Cauchyho v okolí otevřeného konce integrační čáry může v koncovém bodě obsahovat algebraickou singularitu.

Pokládáme-li $\Omega(z)$ za komplexní potenciál rychlostního pole, vzniká z prvního členu pro tu hodnotu γ , s níž budeme v dalším počítat, rychlost řádu konst. $|z - a|$, takže můžeme vedle něho členy $A_2(z - a)^2$ a vyšší zanedbat. Člen A_0 nedává žádného příspěvku k rychlosti a člen $A_1(z - a)$ udává pouze pohyb pole jako celku.

Předpokládejme tudíž, že složka komplexního potenciálu s algebraickou singularitou v bodě a má tvar (viz vztah 9,6)

$$W_0 = \frac{-C}{1 - e^{-2\pi i \gamma}} (z - a)^\gamma. \quad (9,9)$$



Obr. 18.

C je konstanta vzhledem k poloze, může však být závislá na čase.

Tato funkce se dá vyjádřit integrálem typu Cauchyho s obložením v okolí bodu \mathbf{a} rovným

$$W_0^+ - W_0^- = \varphi(\zeta) = -C(\zeta - \mathbf{a})^\gamma. \quad (9,10)$$

Integrační čarou L je patrně dvojitá hranice. Tvar dvojité hranice v okolí koncového bodu \mathbf{a} vyšetříme tak, aby současně byla splněna podmínka rovnosti tlaků po obou stranách dvojité hranice. Podle předpokladu má koncový bod sám obložení f_0 , které znamená cirkulaci logaritmické singularity. Diskontinuita komplexního potenciálu v libovolném bodě ζ dvojité hranice v blízkosti okolí bodu \mathbf{a} je rovna součtu diskontinuit logaritmické a algebraické singularity bodu \mathbf{a}

$$\begin{aligned} W_1 - W_2 &= (W_{i1} - W_{i2}) + (W_{01} - W_{02}) \\ W_{i1} - W_{i2} &= -f_0 \\ W_{01} - W_{02} &= -C(\zeta - \mathbf{a})^\gamma. \end{aligned} \quad (9,11)$$

Zavedeme-li polární souřadnice $\varrho = |\zeta - \mathbf{a}|$, $\Theta = \arg(\zeta - \mathbf{a})$, můžeme poslední vztah rozepsat

$$W_{01} - W_{02} = -|C| \varrho^\alpha e^{-\beta\Theta} e^{i(\arg C + \alpha\Theta + \beta \ln \varrho)}.$$

Na složené hranici má diskontinuitu pouze rychlostní potenciál; musí tudíž rozdíl komplexních potenciálů $W_1 - W_2$ být reálnou funkcí. Cirkulace f_0 je reálná; má-li být reálnou funkcí i rozdíl komplexních potenciálů, příslušných algebraické singularitě, musí platit

$$\arg C + \alpha\Theta + \beta \ln \varrho = k\pi, \quad k \text{ celé číslo} \quad (9,12)$$

Rozdíl sdružených rychlostí (rychlostní skok) v bodě ζ se určí derivací rozdílu komplexních potenciálů podle ζ

$$w_1^* - w_2^* = \frac{d}{d\zeta} (W_1 - W_2) = -C\gamma(\zeta - \mathbf{a})^{\gamma-1}. \quad (9,13)$$

Platí tudíž

$$|w_1 - w_2| e^{-i \arg(w_1 - w_2)} = |C| |\gamma| \varrho^{\alpha-1} e^{-\beta\Theta} e^{i[\arg C + \arg \gamma + (\alpha-1)\Theta + \beta \ln \varrho + \pi]}. \quad (9,14)$$

Za předpokladu, že modul rychlostního skoku $|w_1 - w_2|$ přibývá lineárně s průvodičem ϱ^1 (K je konstanta)

$$|w_1 - w_2| = |C| |\gamma| \varrho^{\alpha-1} e^{-\beta\Theta} = |K| \varrho |\gamma|, \quad (9,15)$$

1) Bez tohoto předpokladu by nebylo možno splnití rovnici pro rovnost tlaků po obou stranách diskontinuitní čáry.

dostáváme pro diskontinuitní čáru v okolí bodu a vztah

$$\varrho = \left(\frac{|K|}{|C|} \right)^{\frac{1}{\alpha-2}} e^{\frac{\beta}{\alpha-2} \Theta}. \quad (9,16)$$

Odtud je patrné, že v okolí koncového bodu a má dvojitá hranice tvar logaritmické spirály. Úhel, svíraný průvodičem a tečnou v libovolném bodě logaritmické spirály je konstantní a je roven

$$\tau = \operatorname{arctg} \frac{\alpha-2}{\beta}. \quad (9,17)$$

Poněvadž vektor $(w_1 - w_2)$ leží vždy ve směru tečny ke dvojitě hranici, platí (obr. 19)

$$\arg(w_1 - w_2) = \Theta + \tau + \pi. \quad (9,18)$$

Avšak pro $\arg(w_1 - w_2)$ vychází z (9,14) rovnost

$$\begin{aligned} \arg(w_1 - w_2) = & \\ = -[\arg C + \arg \Upsilon + & \\ + (\alpha-1)\Theta + \beta \ln \varrho + \pi], & \end{aligned}$$

kterou s ohledem na vztah (9,12) lze psát rovněž ve tvaru

$$= -[\arg \Upsilon - \Theta + (k+1)\pi]. \quad (9,19)$$

Porovnáváním pravých stran rovnic (9,18) a (9,19) obdržíme

$$\tau + \arg \Upsilon = -(k+2)\pi \quad (9,20)$$

Poněvadž

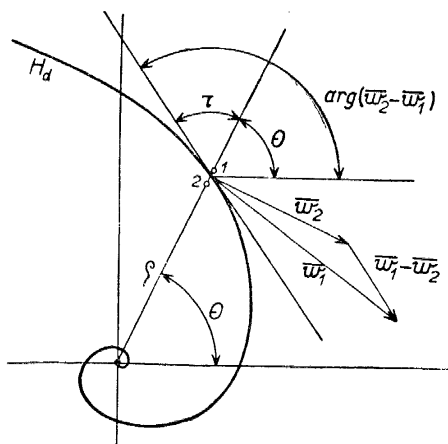
$$\tau = \operatorname{arctg} \frac{\alpha-2}{\beta}, \quad \arg \Upsilon = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha},$$

lze vztah (9,20) splnit pouze tehdy, je-li

$$\beta = \pm \sqrt{\alpha(2-\alpha)}. \quad (9,21)$$

Hledejme nyní takové řešení, při němž diskontinuitní čára je zároveň proudnicí $\Psi_0 = 0$ pro proudění, jež je určeno samotnou složkou W_0 komplexního potenciálu W . Komplexní potenciál v bodě ζ_1 na kladné straně dvojitě hranice je roven

$$\begin{aligned} W_{01} &= \frac{-C}{1 - e^{-2\pi i \gamma}} (\zeta_1 - a)^\gamma = \frac{-C}{1 - e^{-2\pi i \gamma}} (\varrho e^{i\Theta})^{\alpha+i\beta} = \\ &= \frac{|C|}{|1 - e^{-2\pi i \gamma}|} \varrho^\alpha e^{-\beta\Theta} e^{i[\alpha\Theta + \beta \ln \varrho + \arg C - \arg(1 - e^{-2\pi i \gamma}) + \pi]}. \end{aligned}$$



Obr. 19.

Komplexní potenciál v témž bodě na záporné straně hranice je roven

$$\begin{aligned} W_{02} &= \frac{-C}{1 - e^{-2\pi i \gamma}} (\zeta_2 - a)^\gamma = \frac{-C}{1 - e^{-2\pi i \gamma}} [\varrho e^{i(\theta - 2\pi)}]^{x+i\beta} = \\ &= \frac{|C|}{|1 - e^{-2\pi i \gamma}|} \varrho^\gamma e^{-\beta(\theta - 2\pi)} e^{i[\alpha(\theta - 2\pi) + \beta \ln \varrho + \arg C - \arg(1 - e^{-2\pi i \gamma}) + \pi]} . \end{aligned}$$

Má-li být složená hranice proudnicí $\Psi_0 = 0$, je nutné, aby komplexní potenciály W_{01} i W_{02} byly reálnými. Z této podmínky vycházejí vztahy

$$\begin{aligned} \alpha\theta + \beta \ln \varrho + \arg C - \arg(1 - e^{-2\pi i \gamma}) + \pi &= m\pi , \\ \alpha(\theta - 2\pi) + \beta \ln \varrho + \arg C - \arg(1 - e^{-2\pi i \gamma}) + \pi &= n\pi , \end{aligned} \quad (9,22)$$

($m, n \dots$ celá čísla)

kteřé vzhledem k (9,12) splníme tehdy, položíme-li

$$\alpha = \frac{1}{2} .$$

Dosazením této hodnoty do rovnice (9,21) určíme

$$\beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Rovnice diskontinuitní čáry nabývá s těmito hodnotami tvaru

$$\varrho = \left(\frac{|K|}{|C|} \right)^{\frac{2}{3}} e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \theta} . \quad (9,23)$$

Úhel θ měříme kladně ve smyslu proti otáčení ruček. Ve vztahu (9,23) platí tudíž horní znaménko (t. j. $\beta < 0$) pro spirálu zavíjející se v záporném smyslu točení (\curvearrowright). Dolní znaménko (t. j. $\beta > 0$) platí pro spirálu zavíjející se v kladném smyslu točení (\curvearrowleft). Za těchto okolností vychází

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + i\beta = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}} , \\ \gamma^* &= \alpha - i\beta = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} . \end{aligned} \quad (9,24)$$

Z rovnice (9,12) dostáváme pro diskontinuitní čáru výraz

$$\varrho = e^{\frac{\arg C - k\pi}{\beta}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta} \theta} , \quad (9,25)$$

v němž k značí nějaké celé číslo nebo nulu. Po dosazení $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (první případ zavíjení spirály), vychází

$$\varrho = e^{\frac{2\arg C - 2k\pi}{\sqrt{3}}} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{3}} \theta} .$$

V druhém případě zavíjení spirály $\left(\beta = +\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nutno uvažovat místo konstanty C její sdruženou hodnotu C^* . Tento případ platí totiž — v první fázi rozběhu válce — pro okolí bodu a^* , kde komplexní potenciál má tvar

$$W_0 = \frac{-C^*}{1 + e^{2\pi i \gamma^*}} (z - a^*)^{\gamma^*}. \text{ Diskontinuitní čára zde vychází}$$

$$\varrho = e^{\frac{\arg C^* - k\pi}{\beta}} e^{-\frac{\alpha}{\beta} \theta} = e^{\frac{2\arg C^* - 2k\pi}{\sqrt{3}}} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}} \theta}.$$

Obě spirály se liší pouze smyslem točení, jinak vzhledem k souměrnosti proudění jsou shodné. Je tudíž $k = 0$, takže rovnice diskontinuitní čáry má tvar

$$\varrho = e^{\frac{2\arg C}{\sqrt{3}}} \cdot e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \theta}. \quad (9,26)$$

Vztah (9,25) musí být však totožný se vztahem (9,16) neboť oba vztahy jsou analytickým vyjádřením téže diskontinuitní čáry. Porovnáním obou vztahů vychází rovnost

$$\left(\frac{|K|}{|C|}\right)^{\frac{1}{\alpha-2}} = e^{-\frac{\arg C}{\beta}}$$

a odtud

$$|K| = |C| e^{\frac{2-\alpha}{\beta} \arg C} = |C| e^{-\sqrt{3} \arg C}. \quad (9,27)$$

Uvedeme přehledně výsledky, platné za provedených předpokladů pro okolí koncového bodu a dvojité hranice (pro případ, kdy spirála se zavíjí v záporném smyslu).

1. Komplexní potenciál v okolí koncového bodu a má při omezení na první člen rozvoje tvar

$$W_0 = \frac{-C}{1 + e^{-\pi\sqrt{3}}} (z - a)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}. \quad (9,28)$$

2. Komplexní potenciál na kladné resp. záporné straně dvojité hranice vychází

$$W_{01} = \frac{-C}{1 + e^{-\pi\sqrt{3}}} (\zeta_1 - a)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-|C|}{1 + e^{-\pi\sqrt{3}}} \varrho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\sqrt{3}}{2} \theta} = \frac{-|C| e^{-\sqrt{3} \arg C}}{1 + e^{-\pi\sqrt{3}}} \varrho^{\frac{1}{2}},$$

$$(9,29)$$

resp.

$$W_{02} = \frac{-C}{1 + e^{-\pi\sqrt{3}}} (\zeta_2 - a)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-|C|}{1 + e^{-\pi\sqrt{3}}} \varrho^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{\sqrt{3}}{2} \theta} \cdot e^{-2\pi i \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$$

$$= \frac{|C| e^{-\sqrt{3} \arg C} \cdot e^{-\pi\sqrt{3}}}{1 + e^{-\pi\sqrt{3}}} \varrho^{\frac{1}{2}}.$$

3. Dvojitá hranice je tvořena logaritmickou spirálou o rovnici

$$\varrho = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \arg C} \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{3}} \Theta} \quad (9,26)$$

Úhel τ , svíraný průvodičem a tečnou v libovolném bodě, je roven $\tau = \frac{\pi}{3}$.

4. Diskontinuita komplexního potenciálu na dvojitě hranici

$$\varphi(\zeta) = W_{01} - W_{02} = -|C| e^{\frac{2-\alpha}{\beta} \arg C} \cdot \varrho^2 = -|C| e^{-\sqrt{3} \arg C} \cdot \varrho^2 \quad (9,30)$$

přirůstá kvadraticky s průvodičem. Poněvadž logaritmická spirála má délku úměrnou průvodiči, je přírůstek diskontinuity podél dvojitě hranice rovněž kvadratický.

5. Sdružené rychlosti na kladné resp. záporné straně dvojitě hranice vycházejí

$$w_{01}^* = \frac{-C}{1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\zeta_1 - a)^{-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{|C| e^{-\sqrt{3} \arg C}}{1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}} \cdot \varrho \cdot e^{-i(\Theta + \tau + \pi)},$$

resp. (9,31)

$$w_{02}^* = \frac{-C}{1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\zeta_2 - a)^{-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{|C| e^{-\sqrt{3} \arg C}}{1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}} \cdot e^{-\pi/\sqrt{3}} \cdot \varrho \cdot e^{-i(\Theta + \tau)}.$$

Je patrné, že modul sdružených rychlostí přibývá lineárně s průvodičem a tudíž i s obloukem dvojitě hranice. V limitě pro bod a je $w_0^* = 0$.

6. Komplexní potenciál bodů hranice je roven aritmetickému průměru komplexních potenciálů po stranách hranice

$$W_{0H} = -\frac{C}{2} \frac{1 - e^{-\pi/\sqrt{3}}}{1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}} (\zeta_1 - a)^{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{1 - e^{-\pi/\sqrt{3}}}{1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}} |C| e^{-\sqrt{3} \arg C} \cdot \varrho^2. \quad (9,32)$$

7. Vlastní rychlost bodů dvojitě hranice, indukovaná algebraickou singularitou, je rovna

$$w_{0H}^* = \frac{dW_{0H}}{d\zeta} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-\pi/\sqrt{3}}}{1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}} |C| e^{-\sqrt{3} \arg C} \cdot \varrho \cdot e^{-i(\Theta + \tau + \pi)}. \quad (9,33)$$

Je patrné, že vlastní rychlost bodů hranice je rovna aritmetickému průměru rychlostí bodů po obou stranách hranice a že leží v tečně k hranici.

Zbývá vyšetřit, zda je splněna podmínka rovnosti tlaků po obou stranách složené hranice v okolí bodu a . Uvažujeme výsledné proudění, jehož komplexní potenciál je určen algebraickou a logaritmickou singularitou v bodě a a má tudíž tvar

$$W = W_0 + W_i = -\frac{C}{1 + e^{-2\pi i \gamma}} (z - a)^\gamma - \frac{f_0}{2\pi i} \ln(z - a). \quad (9,34)$$

Podmínka rovnosti tlaků je vyjádřena vztahem (8,3)

$$\frac{\partial}{\partial t} (W_1 - W_2) = -\operatorname{Re} (w_1 - w_2) w_H^*,$$

do něhož třeba v uvažovaném případě dosadit:

$$W_1 - W_2 = -f_0 - |K| \varrho^2,$$

$$|K| = |C| e^{\frac{2-\alpha}{\alpha} \arg C}, \quad C = C(t), \quad \Upsilon = \Upsilon(t),$$

$$w_1 - w_2 = |K| \varrho \cdot e^{i(\Theta + \Upsilon + \pi)},$$

$$w_H^* = \frac{|K|}{2} \frac{1 - e^{-\pi/\sqrt{3}}}{1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}} \cdot \varrho \cdot e^{-i(\Theta + \Upsilon + \pi)} + \frac{f_0}{2\pi} \frac{1}{\varrho} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)}.$$

Po malé úpravě nabude vztah (8,3) tvaru

$$\frac{\partial |K|}{\partial t} \varrho^2 + \frac{\partial f_0}{\partial t} = \operatorname{Re} \left[\frac{|K|^2}{2} \frac{1 - e^{-\pi/\sqrt{3}}}{1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}} \varrho^2 + |K| \frac{f_0}{2\pi} \cdot e^{i\left(\tau + \frac{3}{2}\pi\right)} \right]. \quad (9,35)$$

Poněvadž rovnost tlaků je splněna v každém místě dvojité hranice, musí být vztah (9,35) splněn identicky pro libovolné ϱ a Θ v okolí bodu a . Z této podmínky vycházejí dvě relace

$$\frac{\partial |K|}{\partial t} = \frac{|K|^2}{2} \frac{1 - e^{-\pi/\sqrt{3}}}{1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}}, \quad (9,36)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} |K| f_0, \quad (9,37)$$

které určují časové změny veličin f_0 a $|K| = |C| e^{-\sqrt{3} \arg C}$ tak, že při jejich splnění *vyšetřované proudění v okolí koncového bodu vyhovuje všem potřebným podmínkám.*

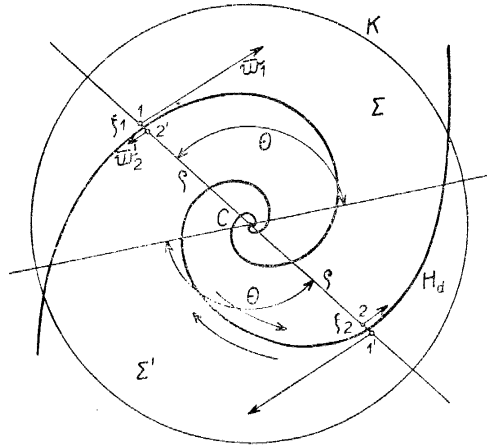
Je třeba si však uvědomit, že provedené řešení předpokládá, že diskontinuitní čára má tvar logaritmické spirály (s exponentem $\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$) a tedy platí pouze v určité fázi vývoje víru. Vlivem logaritmické singularity se totiž spirála začne intenzivně zavíjet především v blízkém okolí singulárního bodu, takže přestane býti logaritmickou spirálou. Sledování tvaru diskontinuitní čáry, jejího obložení jakož i změny proudového pole v dalším časovém průběhu znamená velmi složitou úlohu.

10. Rychlostní pole v okolí vnitřních singulárních bodů dvojité hranice

Vyšetříme možné pole v okolí vnitřních singulárních bodů diskontinuitní čáry, kde dvojité hranice má tvar souměrné dvojspirály. Opíšeme-li z některého vnitřního singulárního bodu, označeného c , kružnici K o dostatečně malém poloměru, vymežeme tím z oblasti proudu S^+ dva samostatné obory, oddělené

dvojitou hranicí H_d a souměrné podle středu dvojspirály c . Označme tyto obory Σ resp. Σ' .

Obdobně jako v předchozím případě volme výsledný komplexní potenciál ve tvaru lineární kombinace potenciálu s algebraickou singularitou a logaritmického potenciálu. Složka potenciálu s algebraickou singularitou nechť sama o sobě představuje proudění, při němž dvojitá hranice nemění polohu a kapalina proudí podél ní s každé strany v jiném smyslu (viz obr. 20).



Obr. 20.

Veličiny, vztahující se k bodům oboru Σ na té straně H_d , kde kapalina proudí ku středu c , označíme indexem 1, na straně hranice, kde kapalina proudí od středu, označíme indexem 2. Odpovídající body v oboru Σ' označíme 1' resp. 2'.

Předpokládejme, že složka komplexního potenciálu s algebraickou singularitou má v oboru Σ tvar (srovnej 9,9)

$$W_0 = \frac{-C}{1 - e^{-\delta\pi i}} (z - c)^\delta. \quad (10,1)$$

Exponent δ budiž komplexní $\delta = \alpha_1 + i\beta_1$, $0 < \alpha_1 \leq 1$, $\beta_1 \neq 0$. V libovolném bodě $\zeta_1 = \rho e^{i\theta}$ složené hranice, patřícím však k oboru Σ , má tudíž komplexní potenciál uvažovaného proudění hodnotu

$$\begin{aligned} W_{01} &= \frac{-C}{1 - e^{-\delta\pi i}} (\zeta_1 - c)^\delta = \frac{-C}{1 - e^{-\delta\pi i}} (\rho e^{i\theta})^{\alpha_1 + i\beta_1} = \\ &= \frac{-|C|}{|1 - e^{-\delta\pi i}|} \rho^{\alpha_1} \cdot e^{-\beta_1\theta} \cdot e^{i[\alpha_1\theta + \beta_1\ln\rho + \arg C - \arg(1 - e^{-\delta\pi i})]}. \end{aligned}$$

V bodě $\zeta_2 = \varrho e^{i(\theta - \pi)}$, souměrném podle středu spirály s bodem ζ_1 a patřícím rovněž do oboru Σ , má komplexní potenciál W_0 hodnotu

$$\begin{aligned} W_{02} &= \frac{-C}{1 - e^{-\delta\pi i}} (\zeta_2 - c)^\beta = \frac{-C}{1 - e^{-\delta\pi i}} [\varrho e^{i(\theta - \pi)}]^{x_1 + i\beta_1} = \\ &= \frac{-|C|}{|1 - e^{-\delta\pi i}|} \varrho^{x_1} \cdot e^{\beta_1(\theta - \pi)} \cdot e^{i[x_1(\theta - \pi) + \beta_1 \ln \varrho + \arg C - \arg(1 - e^{-\delta\pi i})]} . \end{aligned}$$

Poněvadž dvojitá hranice je při uvažovaném proudění proudnicí $\mathcal{V}_0 = 0$, musí být komplexní potenciál W_0 v bodech na hranici reálnou funkcí čili imaginární část musí být rovna nule, t. j.

$$\operatorname{Im} W_{01} = \operatorname{Im} W_{02} = 0 .$$

Z této podmínky dostáváme relaci

$$\begin{aligned} \sin [x_1 \theta + \beta_1 \ln \varrho + \arg C - \arg(1 - e^{-\delta\pi i})] &= \sin [x_1(\theta - \pi) + \\ &+ \beta_1 \ln \varrho + \arg C - \arg(1 - e^{-\delta\pi i})] = 0 , \end{aligned} \quad (10,2)$$

již vyhovíme, položíme-li

$$\alpha_1 = 1 , \quad \alpha_1 \theta + \beta_1 \ln \varrho + \arg C = 0$$

Odtud obdržíme rovnici diskontinuitní čáry

$$\varrho = e^{-\frac{1}{\beta_1} \theta} e^{\frac{1}{\beta_1} \arg C} . \quad (10,3)$$

V oblasti Σ' , ležící po druhé straně dvojitě hranice, předpokládáme komplexní potenciál souměrný podle středu dvojspirály c , takže platí

$$W_{01'} = W_{01} , \quad W_{02'} = W_{02} . \quad (10,4)$$

Diskontinuita komplexního potenciálu v bodě ζ je patrně rovna

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= W_{01} - W_{02'} = W_{01} - W_{02} = \\ &= \frac{-|C|}{1 + e^{+\beta_1 \pi}} \varrho \cdot e^{-\beta_1 \theta} \cdot e^{i[\theta + \beta_1 \ln \varrho + \arg C]} \cdot (1 + e^{\beta_1 \pi}) = -|C| \varrho \cdot e^{-\beta_1 \theta} . \end{aligned}$$

Obdobně jako v případě koncové singularity předpokládáme parabolický přírůstek diskontinuity φ v okolí bodu c

$$\varphi = -|K| \varrho^2 , \quad K = K(t) \neq K(\mathbf{z}) . \quad (10,6)$$

Spojením posledních dvou vztahů obdržíme rovnici diskontinuitní čáry ve tvaru

$$\varrho = \frac{|C|}{|K|} e^{\beta_1 \theta} . \quad (10,7)$$

Tato rovnice musí být shodná s rovnicí (10,3). Porovnáním určíme

$$\begin{aligned} |K| &= |C| e^{+\frac{1}{\beta_1} \arg C} , \\ \beta_1 &= \pm 1 . \end{aligned}$$

Poněvadž úhel Θ měříme kladně proti směru otáčení ruček, nutno do rovnice (10,7) dosadit $\beta_1 < 0$ pro dvojspirálu zavíjející se v záporném smyslu točení (\curvearrowright) a $\beta_1 > 0$ pro dvojspirálu zavíjející se v kladném smyslu točení (\curvearrowleft).

V prvním případě dostáváme rovnici dvojité hranice

$$\varrho = e^{\arg C} \cdot e^{\Theta}, \quad (10,8)$$

v druhém případě vychází (místo C nutno uvažovat C^*)

$$\varrho = e^{\arg C} \cdot e^{-\Theta}. \quad (10,9)$$

Konstanta $|K|$ je též pro oba případy

$$|K| = |C| e^{-\arg C}. \quad (10,10)$$

Uvedeme přehledně výsledky, platné za provedených předpokladů pro okolí vnitřního singulárního bodu dvojité hranice (pro případ, kdy dvojspirála se zavíjí v záporném smyslu).

1. Komplexní potenciál v oboru Σ z okolí singulárního bodu c (obr. 20) má při omezení na prvý člen rozvoje tvar

$$W_0 = \frac{-C}{1 + e^{-\pi}} (z - c)^{1-i}. \quad (10,11)$$

Komplexní potenciál v oboru Σ' je určen středovou souměrností.

2. Komplexní potenciál na hranici oboru Σ v bodech, značených indexem 1 resp. 2, je roven

$$W_{01} = \frac{-C}{1 + e^{-\pi}} (\zeta_1 - c)^{1-i} = - \frac{|C| e^{-\arg C}}{1 + e^{-\pi}} \varrho^2, \quad (10,12)$$

resp.

$$W_{02} = \frac{-C}{1 + e^{-\pi}} (\zeta_2 - c)^{1-i} = + \frac{|C| e^{-\arg C}}{1 + e^{-\pi}} e^{-\pi} \cdot \varrho^2.$$

3. Dvojitá hranice je tvořena logaritmickou dvojspirálou o rovnici

$$\varrho = e^{\arg C} \cdot e^{\Theta} \quad (10,13)$$

Úhel τ , svíraný průvodičem a tečnou v libovolném bodě, je roven $\tau = \frac{1}{4}\pi$.

4. Diskontinuita komplexního potenciálu na dvojité hranici

$$\varphi = W_{01} - W'_{02} = - |C| e^{-\arg C} \cdot \varrho^2 \quad (10,14)$$

přirůstá kvadraticky s průvodičem. Poněvadž logaritmická spirála má délku úměrnou průvodiči, je přírůstek diskontinuity podél dvojité hranice rovněž kvadratický.

5. Sdružené rychlosti na dvojité hranici pro body značené indexem 1 resp. 2 vycházejí

$$w_{01}^* = \frac{-C}{1 + e^{-\pi}} (1 - i)(\zeta_1 - c)^{-i} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{|C| e^{-\arg C}}{1 + e^{-\pi}} \varrho \cdot e^{-i\left(\Theta + \frac{5}{4}\pi\right)}, \quad (10,15)$$

resp.

$$w_{02}^* = \frac{-C}{1 + e^{-\pi}} (1 - i)(\zeta_2 - c)^{-i} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{|C| e^{-\arg C}}{1 + e^{-\pi}} e^{-\pi} \cdot \varrho \cdot e^{-i\left(\Theta + \frac{5}{4}\pi\right)}.$$

Je patrné, že modul sdružených rychlostí přibývá lineárně s průvodičem — a tudíž i s délkou dvojité hranice. V limitě pro bod c je $w_0^* = 0$.

6. Komplexní potenciál bodů hranice je roven aritmetickému průměru komplexních potenciálů po stranách hranice

$$W_{0H} = -\frac{C}{2} \frac{1 - e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} (\zeta_1 - c)^{1-i} = -\frac{1}{2} \frac{1 - e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} |C| e^{-\arg C} \varrho^2. \quad (10,16)$$

7. Vlastní rychlost bodů dvojité hranice, indukovaná algebraickou singularitou, je rovna

$$w_{0H}^* = \frac{dW_{0H}}{d\zeta} = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1 - e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} |C| e^{-\arg C} \cdot \varrho \cdot e^{-i(\Theta + \tau + \pi)}. \quad (10,17)$$

Je patrné, že vlastní rychlost bodů hranice je rovna aritmetickému průměru rychlostí bodů po obou stranách hranice a že leží v tečně k hranici.

Zbývá vyšetřit splnitelnost podmínky stejného tlaku po obou stranách dvojité hranice. Předpokládáme — shodně s případem koncové singularity — že výsledné rychlostní pole má komplexní potenciál určen algebraickou a logaritmickou singularitou v bodě c a má tudíž tvar

$$W = W_0 + W_i = -\frac{C}{1 - e^{-\delta\pi i}} (z - c)^\delta - \frac{f_0}{2\pi i} \ln(z - c). \quad (10,18)$$

Do rovnice (8,3)

$$\frac{\partial}{\partial t} (W_1 - W_2) = -\operatorname{Re} (w_1 - w_2) w_H^*,$$

vyjadřující rovnost statických tlaků po obou stranách dvojité hranice, dosadíme

$$W_1 - W_2 = -f_0 - |K| \varrho^2,$$

$$|K| = |C| e^{\frac{1}{\beta_1} \arg C}, \quad C = C(t), \quad \beta_1 = \beta_1(t),$$

$$w_1 - w_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} |K| \varrho \cdot e^{i\left(\Theta + \frac{5}{4}\pi\right)},$$

$$w_H^* = \frac{|K|}{\sqrt{2}} \frac{1 - e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} \varrho \cdot e^{-i\left(\Theta + \frac{5}{4}\pi\right)} + \frac{f_0}{2\pi} \frac{1}{\varrho} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)}.$$

Po malé úpravě nabude vztah (8,3) tvaru

$$\frac{\partial |K|}{\partial t} \varrho^2 + \frac{\partial f_0}{\partial t} = \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} |K|^2 \varrho^2 + |K| \frac{f_0}{\pi \sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \right]. \quad (10,19)$$

Poněvadž rovnost tlaků je splněna v každém místě dvojité hranice, musí být vztah (10,19) splněn identicky pro libovolné ϱ a Θ v okolí bodu c . Z této podmínky vycházejí dvě relace

$$\frac{\partial |K|}{\partial t} = |K|^2 \frac{1 - e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}}, \quad (10,20)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} |K| f_0. \quad (10,21)$$

Obdobně jako v předešlém případě dostáváme vztahy, které určují časové změny veličin f_0 a $|\mathbf{K}| = |\mathbf{C}| e^{-\arg C}$, dávající možné nestacionární proudění v okolí vnitřního singulárního bodu c dvojité hranice, t. j. *takové proudění, které vyhovuje všem potřebným podmínkám.*

Stejně jako v případě jednoduché spirály platí provedené řešení s dvojspirálou pouze v určité fázi vývoje víru, neboť vlivem logaritmické singularity se vyšetřovaná dvojspirála začne deformovat.

11. Srovnání výsledků theoretických s experimentálními

Výsledky, získané theoreticky v předcházejících statích, byly odvozeny za jistých zjednodušujících předpokladů. O oprávněnosti a přípustnosti těchto předpokladů — a tím současně o tom, do jaké míry se theoretické výsledky skutečnosti blíží — lze soudit jedině z porovnání s výsledky experimentálními. Poněvadž pokusy lze provést pouze s kapalinami skutečnými, t. j. vazkými, je třeba si především uvědomit, že theoretické výsledky, odvozené za předpokladu kapaliny nevazké, představují pouze řešení náhradní čili limitní případ, jemuž se bude skutečnost blížit tím více čím vazkost kapaliny bude menší.

Vlastní experimenty, které by ověřovaly theoreticky odvozené výsledky, provedeny nebyly. V literatuře je však uvedeno dostatečné množství provedených pokusů, na nichž lze porovnání provést. Nevýhodou takto získaných podkladů bývá to, že vždy nebývají dostatečně podrobně popsány vedlejší okolnosti, které mají vliv na experimentální výsledky a podle nichž lze odhadnout, do jaké míry lze asi shodu očekávat. V tomto ohledu z pramenů, které byly k dispozici, jsou nejúplněji popsány pokusy, které provedl H. L. RUBACH [8]. Poněvadž lze očekávat, že i ostatní výsledky, na něž se budeme odvolávat, byly získány za podobných podmínek jako výsledky Rubachovy, uvedeme nejprve stručně způsob provádění pokusů Rubachových jakož i některé okolnosti, na něž nutno brát ohled při hodnocení pokusných výsledků.

Pokusné zařízení, s nímž pracoval Rubach, sestávalo z vodní nádrže obdélníkového půdorysu, z vozíku, jenž projížděl po okrajích této nádrže a nesl pokusné těleso, a ze zařízení pro registraci. Vozík byl poháněn alternativně buď těžkým závažím nebo stlačenou zpružinou. Pokusné těleso bylo ponořeno do vody a obraz proudového pole, které se za pokusným tělesem při jeho pohybu vytvořilo, byl registrován fotokomorou upevněnou na vozíku. Visualisace proudění byla provedena lykopodiovým práškem, jímž byla hladina posypána. Pokusy byly prováděny ve tmě; v určitých okamžitých polohách vozíku byla hladina osvětlena bleskovým světlem a současně fotografována.

Z povahy provádění pokusů vyplývá, že získané obrazy proudových polí nejsou ve skutečnosti obrazy polí rovinných, nýbrž obrazy hladiny, jež při

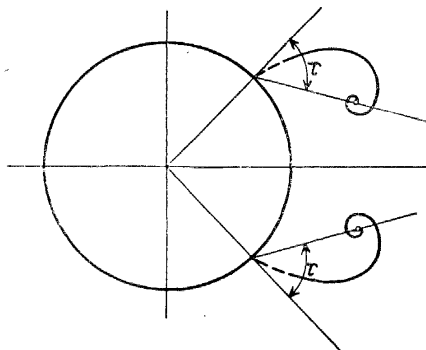
pohybu tělesa je plochou prostorovou. Je zřejmé, že obě pole nejsou shodná, nýbrž že se sobě pouze blíží. Ani sama hladina, jež byla posypána drobnými částicemi lykopodia, nesledovala přesně pohyb spodních vrstev kapaliny. Jak uvádí Rubach, vytvořil se v jisté době po posypání na hladině jakýsi povlak, který se patrně pohyboval jinak než spodní kapalina. Z toho důvodu musel být povrch kapaliny často obnovován. Pokusné těleso muselo být nastaveno horním okrajem poněkud pod úroveň klidné hladiny z toho důvodu, že v opačném případě se v okolí tělesa vytvářel konkávní meniskus, na němž se částičky lykopodia nedržely a počátek vzniku vírů nebyl z toho důvodu patrný. Je jisté, že i při nastavení tělesa pod úroveň hladiny nastávají především v blízkém okolí tělesa jisté odchylky proti předpokládanému rovinnému obtékání. Konečně třeba upozornit na účinek spodních vírů, které se oddělovaly od dolního konce tělesa, sahajícího téměř ke dnu nádrže, a které po určité době pohybu tělesa znatelně ovlivňovaly proudění na hladině.

K porovnání výsledků theoretických s experimentálními nutno přistoupit s vědomím uvedených okolností, které osvětlují odchylky pozorované skutečnosti od vyšetřovaného rovinného problému, jakož i s vědomím přibližnosti provedeného řešení. Theoreticky získané výsledky byly odvozeny jako možné řešení pro určitou fázi vývoje vírů při zanedbání všech vyšších členů rozvoje pro komplexní potenciál v okolí singulárních bodů a platí tudíž pro blízké okolí těchto bodů. Ve skutečnosti lze očekávat, že budou přibližně platit, pokud ovšem shoda nastane, i pro konečně rozsáhlé okolí singulárních bodů v jistém časovém rozsahu, a to při obtékání libovolného tvaru, neboť tvar tělesa při vyšetřování poměrů v okolí singulárních bodů se neuplatnil.

Všimněme si nejprve obtékání kruhového válce na snímku tab. I, obr. 1, který uveřejnil Prandtl [9]. Na snímku je patrna výrazná diskontinuitní čára — dvojitá hranice, sestávající ze dvou spirál souměrně položených vzhledem k ose válce, ležící ve směru proudění. O tom, jaký průběh má diskontinuitní čára v bezprostřední blízkosti tělesa, nelze podle obrázku bezpečně rozhodnout především z toho důvodu, že právě v blízkém okolí tělesa lze očekávat největší odchylky pozorovaného pole od skutečného. Prodloužíme-li však spirálu tak, aby v počátečním bodě na tělese měla její tečna směr radiální, můžeme přibližně stanovit velikost úhlu τ , svíraného průvodičem a tečnou spirály v takto určeném počátečním bodě spirály. Změřená hodnota úhlu τ je $\tau \approx 57^\circ$, theoretická hodnota úhlu τ , platná pro blízké okolí singulárního bodu, byla odvozena $\tau = 60^\circ$. Shodu hodnot experimentální a theoretické lze zajisté pokládat za uspokojivou.

Tuto kvantitativní shodu lze rovněž zjistit na řadě snímků Rubachových, na nichž je zachycen postupný vývoj dvojice vírů za pohybující se válcem, viz obr. II/1 až III/6. O tvaru diskontinuitní čáry a jejím navázání na konturu válce na snímcích obr. II/1 až II/5, zachycujících proudnicové pole v rozsahu

prvých 8 cm uběhnuté dráhy, opět nelze vzhledem k výše odůvodněnému skreslení skutečného pole bezpečně soudit. Na základě předcházejícího případu lze tvrdit, že v okolí singulárního bodu má diskontinuitní čára tvar spirály, což však ze snímků není zcela zřetelně patrné. Tvar diskontinuitní čáry nelze sice určit ani na dalších snímcích, III/1 až III/6, lze však předpokládat, že diskontinuitní čára u kontury tělesa je tvořena prodlouženou spirálou a že na těleso navazuje ve směru normály v bodě přibližně uprostřed mrtvého koutu, který se na zadní straně tělesa vytváří v horní i dolní polovině.



Obr. 21.

Stanovíme-li za tohoto předpokladu velikost úhlu τ (viz obr. 21) na snímcích obr. II/6 až III/5, zachycujících další průběh vývoje dvojice vřtů až do porušení symetrie proudění, naměříme hodnoty nepříliš se lišící od theoretické hodnoty $\tau = 60^\circ$. Pro porovnání je na uvedených snímcích vynesena theoretická hodnota úhlu $\tau = 60^\circ$. Upozorňujeme na tuto nápadnou shodu, ač skutečná spirála nemá tvar theoreticky odvozené logaritmické spirály. Tuto okolnost snad by bylo možno vysvětlit tím, že logaritmická

singularita mění tvar spirály především v okolí středu víru, neboť tam indukuje veliké rychlosti $w_i = \text{konst} \frac{1}{\rho}$, kdežto ve větších vzdálenostech od středu víru v důsledku rychle se zmenšující redukované rychlosti w_i se změny příliš neprojeví a spirála přibližně podržuje tvar původní logaritmické spirály.

Diskontinuitní čára tvaru zřetelné spirály jakož i její postupný vývoj je zvláště dobře patrný na řadě snímků obr. IV/1 až IV/6, pořizovaných rovněž Rubachem, kde je registrováno proudové pole při obtékání prohnuté desky tvaru kruhového oblouku. Zde je zajímavé si všimnout navázání diskontinuitní čáry na konturu tělesa. Je patrné, že diskontinuitní čára obecně nenavazuje na konturu tělesa tečně, nýbrž že tvoří ostrý (na př. IV/1 a IV/2) nebo tupý roh (na př. V/3). Překontrolujeme-li opět velikost úhlu — což lze dobře provést na příklad na snímku obr. V/3, kde je patrná část dvojité hranice u tělesa — naměříme hodnotu $\tau = 63^\circ$. Tím je potvrzen dříve vyslovený závěr, že diskontinuitní čára má být přibližně stejná pro obtékání různých těles.

Na dalším snímku (viz tab. I, obr. 3) si všimneme obtékání rovinné desky kolmo k proudu postavené. Úhel τ , vymezený shodně jako v předcházejících případech tečnou k proudnici v bodě utržení na přední hraně desky a spojnicí

bodou odtržení se středem víru, opět vychází $\tau = 60^\circ$ ve shodě s dosavadními výsledky. Na tomto obrázku lze — alespoň v jisté části — určit průběh diskontinuitní čáry z patrného zlomu proudnic.

Na dalším snímku I/4 je vyfotografováno pole proudnic při obtékání ostrého rohu. Úhel τ spirály, určený v bodě odtržení proudu na tělese, je opět roven $\tau \approx 60^\circ$. Na snímku je výrazná nespojitost obrazu diskontinuitní čáry, která může být způsobena buď skutečným rozpadem vířivé vrstvy nebo může být snad vysvětlena nějakou podružnou příčinou (na př. shluknutí částíček, které nesleduje přesně tvar diskontinuitní čáry). V blízkém okolí středu víru, zdá se, má spirála větší úhel τ , svíraný tečnou a průvodičem. Tuto okolnost by bylo snad možno vysvětlit intenzivním sbalováním diskontinuitní čáry vlivem logaritmické singularity.

Pro experimentální ověření polí, vznikajících v okolí vnitřních singulárních bodů diskontinuitní čáry, je k dispozici pouze několika málo pokusných výsledků. Z obr. I/2, pořízeného Prandtlem, je vidět tvar složené hranice, která se vytváří při obtékání prohnuté desky. Diskontinuitní čára, vycházející z odtokové hrany, se na několika místech „sbaluje“. Tato místa jsou vnitřními singulárními body dvojité hranice a v jejich okolí, jak je ze snímků patrné, má diskontinuitní čára tvar souměrné dvojspirály. Theoretický výsledek je tímto zjištěním, alespoň po stránce kvalitativní, potvrzen. Zda úhel τ , svíraný tečnou a průvodičem v libovolném bodě blízkého okolí singulárního bodu, je blízký theoreticky určené hodnotě $\tau = 45^\circ$, nedá se pro malé rozměry snímků dobře určit. Kvalitativní shoda teorie s pokusnými výsledky je patrna i z dalších Prandtlových snímků I/5 a I/6, zachycujících dvě stadia obtékání napříč proudou postavené desky.

Na základě provedeného porovnání lze souhrnně říci, že shoda výsledků experimentálních s theoretickými je uspokojivá po stránce kvalitativní. V jisté míře byla shledána i shoda kvantitativní.

Souhrn

Předložená práce se zabývá problémem nestacionárního rovinného obtékání tělesa při vzniku turbulentního úplavu za tělesem. Jak známo, shodují se pozorovaná proudová pole s polem potenciálním, spojitým v celém rozsahu proudění, pouze v krátké době na počátku rozběhu. V dalším průběhu nastává změna skutečného proudového pole oproti tomuto poli v tom, že za tělesem se začnou vytvářet víry, které na sebe váží energii a jsou hlavní příčinou odporu. Bližší pozorování ukazuje, že z tělesa vychází tenká vrstva vířivé kapaliny s velkým rychlostním gradientem a s koncentrují se vorticitou v koncovém singulárním bodě diskontinuitní vrstvy — jádru vznikajícího víru. Pokud se týče původu této vrstvy, je možno si představit, že pochází

z mezní vrstvy na kontuře tělesa (Prandtl) nebo že vzniká soutokem dvou proudů po porušení (přetržení) proudu (Helmholtz). V limitním případě po nulovou vazkost přechází diskontinuitní vrstva v diskontinuitní čáru, čímž se problém stává přístupným matematickému zpracování pomocí theorie analytických funkcí.

V práci je diskontinuitní čára považována za dvoubřehý zářez, vycházející z tělesa a vzniklý porušením oblasti regulárního proudění tělesem, a tvořící tudíž nestacionární dvojitou hranici regulární oblasti proudu, kterou možno přičítat k hranici stacionární — kontuře tělesa. Z tohoto hlediska je matematicky formulována obecná úloha úplného obtékání tělesa se vznikem turbulentního úplavu jakožto nestacionární okrajová úloha theorie analytických funkcí s konturou zčásti časově proměnnou, jejíž řešení se dá v každém okamžiku vyjádřit integrálem typu Cauchyho s obložením na kontuře tělesa i na dvojitě hranici, t. j. zářezu, který z tělesa vychází. Tvar dvojitě hranice a velikost obložení, jež jsou funkcemi času, jsou určeny okrajovými podmínkami.

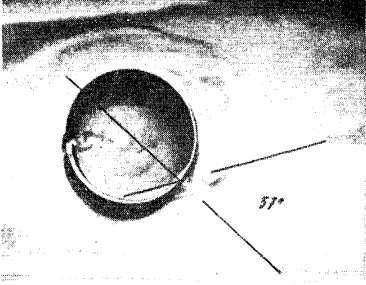
Je sestrojen nestacionární komplexní potenciál proudového pole, sestávající z členů s logaritmičkou a algebraickou singularitou, který splňuje přibližně v okolí singulárního bodu všechny nutné podmínky proudění. Diskontinuitní čáru dává přibližně ve tvaru logaritmičké spirály s úhlem stoupání 60° . Tento theoretický závěr je potvrzen shodou s celou řadou experimentálních výsledků.

Stejným způsobem je sestrojen i nestacionární komplexní potenciál v okolí vnitřních singulárních bodů, kde v jisté fázi vývoje víru má diskontinuitní čára tvar souměrné logaritmičké dvojspirály s úhlem stoupání 45° . I tento výsledek je potvrzen experimentálně.

LITERATURA

- [1] *Th. v. Kármán, H. L. Rubach*: Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes; *Physikalische Zeitschrift* No 2, 13. Jahrgang (1912).
- [2] *H. Helmholtz*: Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen; *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Nr. 79.
- [3] *L. Prandtl*: Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit; *Th. v. Kármán, Levi-Civita*: Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922).
- [4] *В. И. Смирнов*: Курс высшей математики; Гос. изд. тех.-теорет. литературы, Москва-Ленинград 1952.
- [5] *И. Е. Кочин*: Векторное исчисление и начала тензорного исчисления; изд. АН СССР, Москва 1951.
- [6] *М. А. Лаврентьев, В. В. Шабат*: Методы теории функций комплексного переменного; Гос. изд. тех.-теорет. литературы, Москва-Ленинград 1954.

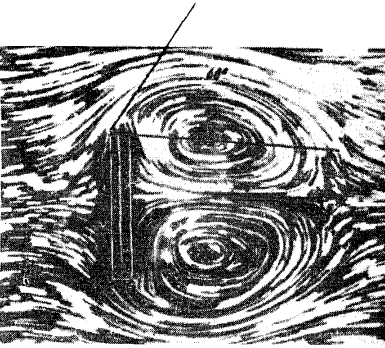
TAB. I.



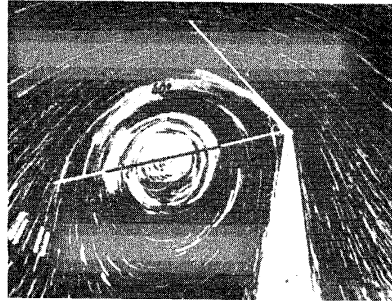
1



2



3



4



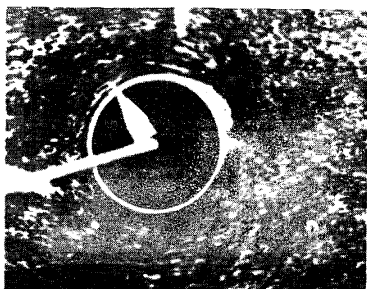
5



6

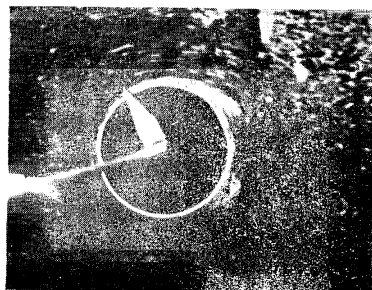
TAB. II.

I... celkem uběhnutá dráha



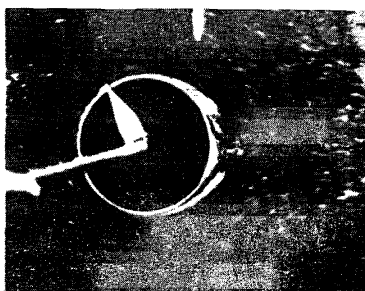
I = 3 cm

1



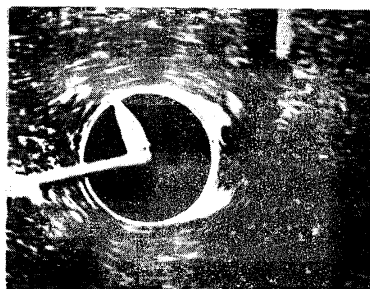
I = 6,5 cm

4



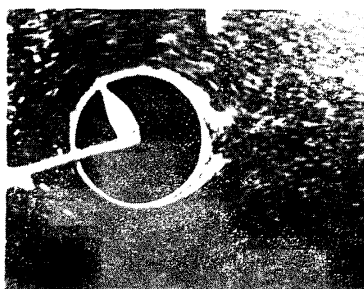
I = 4 cm

2



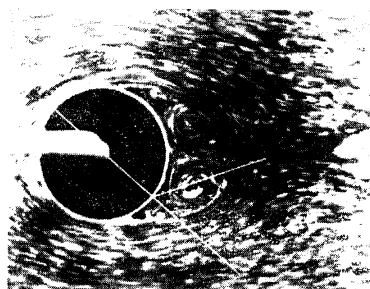
I = 8 cm

5



I = 5 cm

3

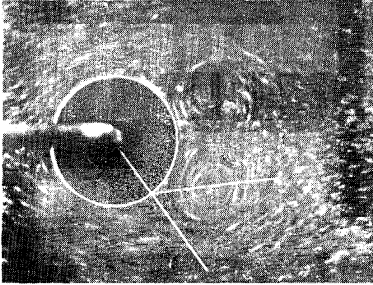


I = 10 cm

6

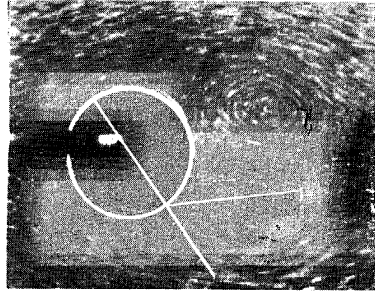
TAB. III.

1 celkem uběhnutá dráha vynesení úhel 60°



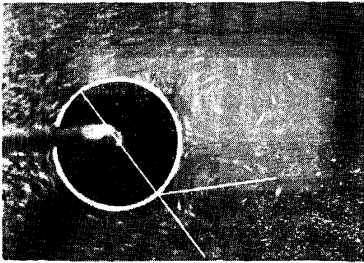
l = 15 cm

1



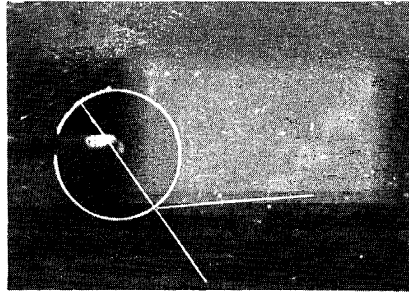
l = 30 cm

4



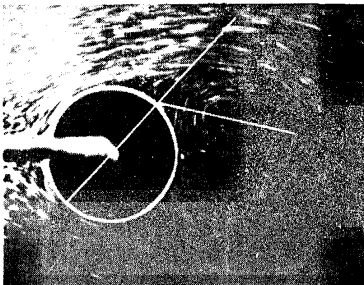
l = 20 cm

2



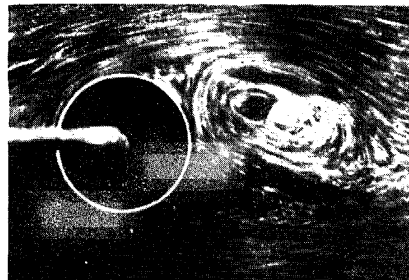
l = 35 cm

5



l = 25 cm

3

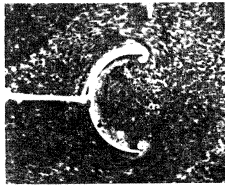


l = 40 cm

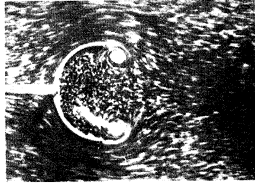
6

TAB. IV.

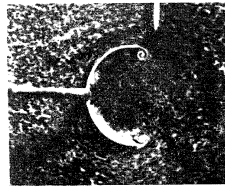
I... celkem uběhnutá dráha



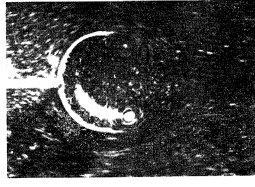
I 0,5 cm 1



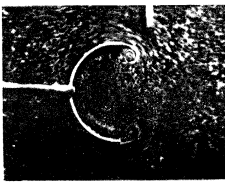
I 3 cm 4



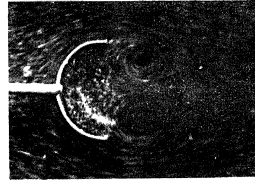
I 1 cm 2



I 5 cm 5



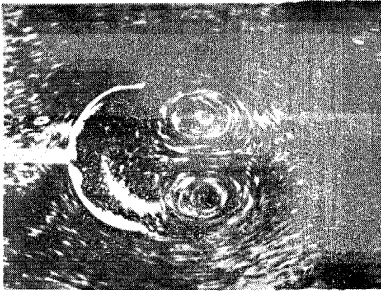
I 2 cm 3



I 8 cm 6

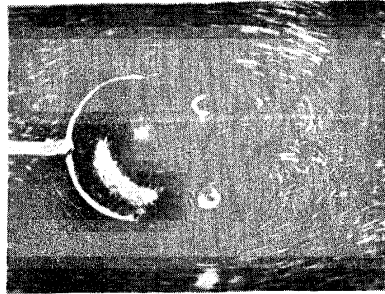
TAB. V.

l celkem uběhnutá dráha



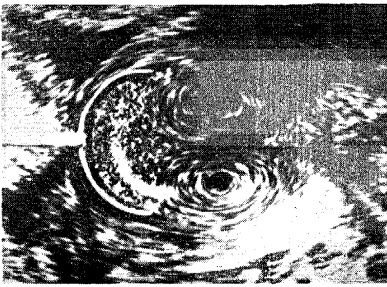
$l = 10$ cm

1



$l = 20$ cm

4



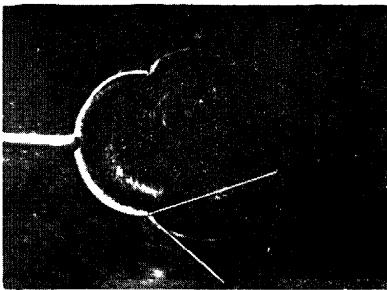
$l = 13$ cm

2



$l = 25$ cm

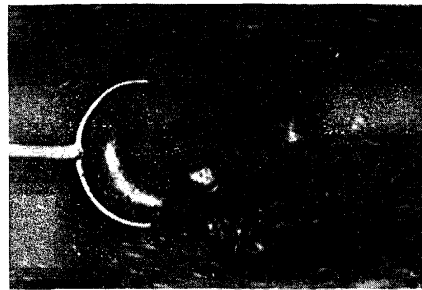
5



$l = 16$ cm

60°

3



$l = 30$ cm

6

- [7] *Н. И. Мусхелишвили*: Сингулярные интегральные уравнения; ОГИЗ Гостехиздат 1946.
- [8] *Н. Л. Rubach*: Über die Entstehung und Fortbewegung des Wirbelpaares hinter zylindrischen Körpern; Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 185, Berlin 1916.
- [9] *L. Prandtl*: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung; Prandtl, Betz: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen, 1927.
- [10] *F. Bauer, O. Brůha, Z. Jaňour*: Základy proudění; Vědecko-technické nakladatelství, Praha 1950.
- [11] *Н. Е. Коци, И. А. Кубель, Н. В. Розе*: Теоретическая гидромеханика; ОГИЗ Гостехиздат 1948.
- [12] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*: Уравнения математической физики; Гос. изд. тех.-теорет. литературы, Москва-Ленинград 1951.
- [13] *Н. Helmholtz*: Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen; Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 79.
- [14] *L. Prandtl*: Tragflügeltheorie; Prandtl, Betz: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen, 1927.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНЕНИЯ К ТЕОРИИ ОБРАЗОВАНИЯ ВИХРЕЙ В ЖИДКОСТЯХ

ИРЖИ ДРАСКИЙ (Jiří Dráský)

(Поступило в редакцию 6/X 1955 г.)

Настоящая работа посвящена задаче неустановившегося плоского обтекания тел с образованием турбулентного вихревого следа за телом. Как известно, наблюдаемые поля тока совпадают с потенциальным, непрерывным в целой области полем лишь короткое время после начала движения. При дальнейшем движении настает изменение действительного поля потока, проявляющееся в том, что за телом начинают образовываться вихри, которые поглощают энергию и являются главной причиной сопротивлений. Более внимательные наблюдения показывают, что из тела выходит тонкий слой завихренной жидкости с большим скоростным градиентом и с концентрирующейся интенсивностью в особой точке конца слоя разрыва — ядре образующегося вихря. Что касается причины возникновения этого слоя, то можно себе представить, что он образовывается из пограничного слоя на контуре тела (Прандтль) или что он возникает при слиянии двух потоков после нарушения (разрыва) течения (Гельмгольц). В предельном случае — при нулевой вязкости — слой разрыва переходит

в линию разрыва, благодаря чему задача становится доступной математической обработке при помощи теории аналитических функций.

В настоящей работе линия разрыва принимается за дважды пробегаемый вырез, выходящий из тела и возникший нарушением области регулярного потока движущимся телом. Этот вырез образует неустановившуюся двойную границу регулярной области потока, которую можно сопрягать с установившейся стационарной границей — контуром тела. С этой точки зрения и была математически поставлена общая задача полного обтекания тела с образованием турбулентного вихревого следа, как нестационарная краевая задача теории аналитических функций с контуром частично во времени переменным. Такое решение можно в любой момент времени выразить интегралом типа Коши с плотностью на контуре тела и на двойной границе (т. е. выреза, выходящего из тела). Вид двойной границы и величина плотности интеграла Коши, которые являются функциями времени, задаются краевыми условиями.

В работе выводится неустановившийся комплексный потенциал поля, составленный из членов с логарифмической и алгебраической особенностями, который приближенно удовлетворяет всем необходимым условиям в окрестности особой точки. Линия разрыва получается приближенно в виде логарифмической спирали с углом 60° . Этот теоретический результат подтвержден рядом опытных данных.

Аналогичным способом выведен и нестационарный комплексный потенциал в окрестности внутренних особых точек, где — в некоторой стадии развития вихрей — линия разрыва имеет форму двойной осесимметричной логарифмической спирали с углом 45° . И этот результат подтвержден экспериментально.

EIN BEITRAG ZUR THEORIE DER WIRBELBILDUNG IN FLÜSSIGKEITEN

JIŘÍ DRÁSKÝ

(Eingegangen am 6. Oktober 1955)

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem Problem der ebenen instationären Strömung bei der Entstehung der turbulenten Wirbelzone hinter dem umströmten Körper. Wie bekannt, stimmen die beobachteten Strömungsfelder mit dem im ganzen Bereich stetigen Potentialfeld nur am Anfang der Bewegung überein. Im weiteren ändert sich die wirkliche Strömung gegenüber diesem Felde so, daß sich hinter dem Körper Wirbel entwickeln, die die Ursache der Energieverluste und des Widerstandes bilden. Genauere Beobachtung zeigt, daß sich von dem Körper eine dünne Schicht der wirbelnden Flüssigkeit

mit großem Geschwindigkeitsgradienten und konzentrierender Vortizität im singulären Endpunkt der Diskontinuitätsschicht — im entstehenden Wirbelkern — ablöst. Was den Ursprung dieser Schicht betrifft, ist es möglich sich vorzustellen, daß sie aus der Grenzschicht an der Körperkontur (Prandtl) oder durch Zusammenfließen zweier Ströme nach dem Zerreißen der Flüssigkeit (Helmholtz) entsteht. Im Grenzfall der verschwindenden Viskosität geht die Diskontinuitätsschicht in die Diskontinuitätslinie über, worauf das Problem der Bearbeitung mittels analytischer Funktionen zugänglich ist.

In der Arbeit wird die Diskontinuitätslinie als zweiseitiger Einschnitt betrachtet, der von dem Körper ausgeht und durch die Zerstörung des Gebietes regulärer Strömung durch den Körper entstanden ist. Der Einschnitt bildet somit die instationäre doppelte Grenze des regulären Stromgebietes, sodaß man sie zu der stationären Grenze — der Kontur des Körpers — zu zählen kann. Von diesem Standpunkt aus ist die allgemeine Aufgabe der vollständigen Umströmung des Körpers samt der Entstehung der turbulenten Wirbelzone als die instationäre Randaufgabe der Theorie analytischer Funktionen mit der zum Teil von der Zeit abhängigen Kontur formuliert. Ihre Lösung läßt sich in jedem Zeitpunkt durch ein Integral vom Cauchy-Typus mit der Belegung auf der Körperkontur, sowie auf der doppelten Grenze, d. h. auf dem vom Körper ausgehenden Einschnitt ausdrücken. Die Gestalt der Grenze und die Dichte der Belegung, die Funktionen der Zeit sind, werden durch die Randbedingungen bestimmt.

Es wird das instationäre komplexe Potential des Strömungsfeldes konstruiert, das aus Gliedern mit einer logarithmischen und algebraischen Singularität besteht und in der Umgebung des Singularitätspunktes sämtliche notwendigen Strombedingungen annähernd erfüllt. Es ergibt eine Diskontinuitätslinie von der Form der logarithmischen Spirale mit dem Steigungswinkel 60° . Diese theoretische Schlußfolgerung wird durch eine Reihe experimentaler Ergebnisse bestätigt.

Auf dieselbe Art wird das instationäre komplexe Potential in der Umgebung innerer Singularitätspunkte berechnet, wo im bestimmten Stadium der Wirbelentwicklung die Diskontinuitätslinie die Gestalt der punktsymmetrischen logarithmischen Doppelspirale mit dem Steigungswinkel 45° hat. Auch dieses Ergebnis ist experimental bestätigt.